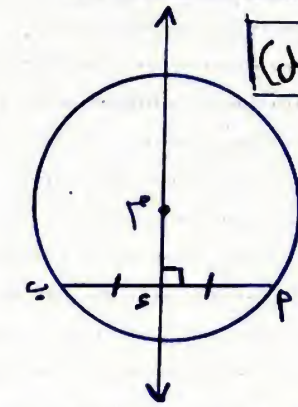
الهندسة

الوحدة الرابعة (الدائرة)



مار بالمركز (محور تماثل)

ينصف القاعدة

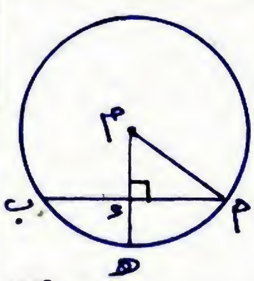
عمودي على القاعدة

1 المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها يكون عمودي على هذا الوتر

2 المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودياً على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر

3 المستقيم العمودي على وتر الدائرة من منتصفه يكون محور تماثل لها (مار بالمركز)

مثال 1 في الشكل المقابل



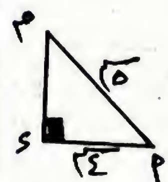
دائرة م نصف قطرها ٥ سم

م ء ⊥ أب ، أب = ٨ سم

أوجد طول ء هـ

البرهان ∵ م ء ⊥ أب ∴ ء منتصف أب

∴ أ ء = ء ب = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ سم



∵ م أ = م هـ = نق = ٥ سم

في Δ م ء أ القائم في ء

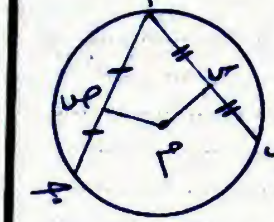
من نظرية فيثاغورث

م ء = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ سم

∴ ء هـ = ٥ − ٣ = ٢ سم #

أكتب البرهان بأسلوبك الخاص ولكن أكتبه بالتفصيل وأكتب السبب ولا تختصر

مثال 2 في الشكل المقابل



ق(∠أ) = ٤٣° ، س منتصف أب

ص منتصف أجـ أوجد

ق(∠س م ص)

البرهان

∵ س منتصف أب ∴ ق(∠س) = ٩٠°

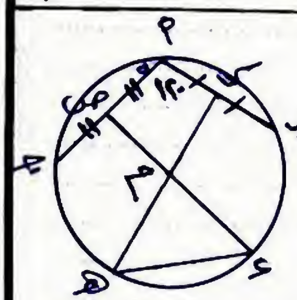
∵ ص منتصف أجـ ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠س م ص) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٣°)

= ٣٦٠° − ٢٢٣° = ١٣٧° #

مثال 3 دائرة مركزها م



ق(∠أ) = ١٢٠° ، س منتصف أب

ص منتصف أجـ أثبت أن

Δ م ء هـ متساوي الأضلاع

البرهان ∵ س منتصف أب ∴ ق(∠س) = ٩٠°

∵ ص منتصف أجـ ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠س م ص) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°

∴ ق(∠ء م هـ) = ق(∠س م ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

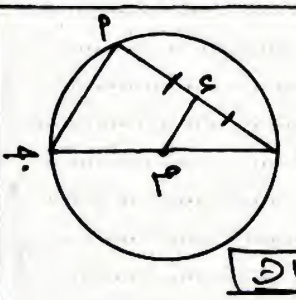
∵ م ء = م هـ = نق

∴ ق(∠ء) = ق(∠هـ) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = ٦٠°

∴ ق(∠ء) = ق(∠هـ) = ق(∠ء م هـ) = ٦٠°

∴ Δ م ء هـ متساوي الأضلاع

مثال 4 في الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، ء منتصف أب

① أثبت أن م ء // أجـ

② أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ ء منتصف أب ، ∵ م منتصف بجـ

∴ ء م // أجـ ، ء م = ½ أجـ نظرية ① #

∵ ء منتصف أب ∴ ق(∠ء) = ٩٠°

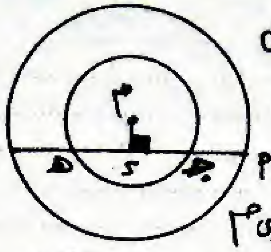
∴ ق(∠أ) = ق(∠ء) = ٩٠° بالتناظر (حرف F)

② #

مثال (5) في الشكل المقابل

م د ⊥ أ ب إثبت أن

أ جـ = هـ ب



البرهان في الدائرة الصغرى م

∵ م د ⊥ جـ هـ ∴ د منتصف جـ هـ

∴ جـ د = د هـ ← (1)

في الدائرة الكبرى م

∵ م د ⊥ أ ب ∴ د منتصف أ ب

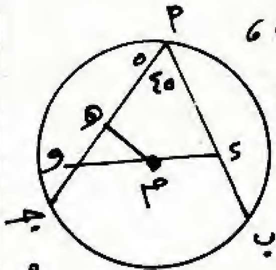
∴ أ د = د ب ← (2)

بطرح (1) من (2) ينتج أن

أ جـ = هـ ب #

مثال (6) د ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب ، ق(أ) = ٤٥°

إثبت أن Δ م هـ و متساوي الساقين



البرهان ∵ د منتصف أ ب ∴ ق(د) = ٩٠°

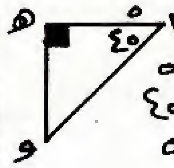
∵ هـ منتصف أ جـ ∴ ق(هـ) = ٩٠°

∴ ق(د م هـ) = ٣٦٠ − (٩٠° + ٩٠° + ٤٥°)

= ١٣٥°

∴ ق(هـ م و) المكملة = ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°

في Δ م هـ و القائم في هـ



ق(و) = ١٨٠ − (٤٥ + ٩٠) = ٤٥°

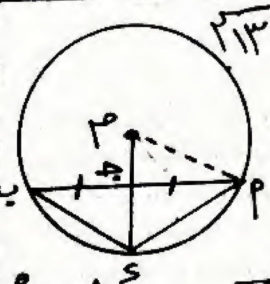
∴ ق(م) = ق(و) = ٤٥°

∴ Δ م هـ و متساوي الساقين

مثال (7) دائرة م نصف قطرها ١٣ سم

أ ب = ٢٤ سم ، جـ منتصف أ ب

أوجد مساحة Δ أ د ب

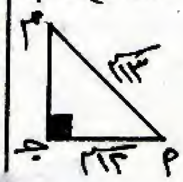


العمل نرسم م أ نصف قطر

البرهان ∵ جـ منتصف أ ب ∴ ق(جـ) = ٩٠°

∴ أ جـ = جـ ب = ١٢ سم

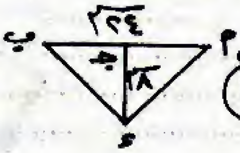
في Δ م جـ أ القائم في جـ



م جـ = $\sqrt{(١٣)^2 - (١٢)^2}$ = ٥ سم

∵ م د = نق = ١٣ سم ∴ جـ د = ١٣ − ٥ = ٨ سم

في Δ أ ب د

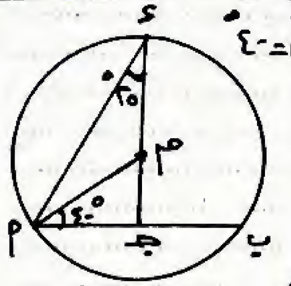


مساحة Δ = ½ طول القاعدة × الارتفاع

= ١٢ × ٨ = ٩٦ سم²

مثال (8) ق(د) = ٢٥° ، ق(م أ جـ) = ٤٠°

برهن أن جـ منتصف أ ب



البرهان في Δ م د أ

∵ م د = م أ = نق

∴ ق(د) = ق(م أ د) = ٢٥°

∴ ق(جـ أ د) = ٤٠° + ٢٥° = ٦٥°

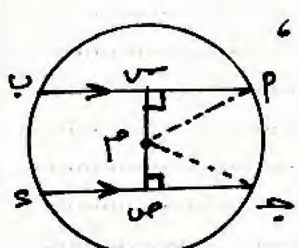
في Δ د جـ أ ∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق(جـ) = ١٨٠° − (٦٥ + ٢٥) = ٩٠°

∴ م جـ ⊥ ب أ ∴ جـ منتصف أ ب #

مثال (9) أ ب // جـ د ، أ ب = ١٢ سم ،

جـ د = ١٦ سم أوجد البعد بين الوترين أ ب ، جـ د إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠ سم



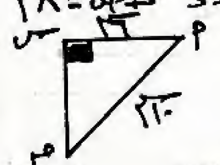
العمل نرسم س ص حيث س ص ⊥ أ ب ، س ص ⊥ جـ د

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب أ س = ٦ سم

∵ م ص ⊥ جـ د ∴ ص منتصف جـ د جـ ص = ٨ سم

في Δ أ س م القائم في س

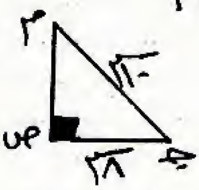
من نظرية فيثاغورث



م س = $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

في Δ م جـ ص القائم في ص

من نظرية فيثاغورث



م ص = $\sqrt{١٠٠ - ٦٤}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

∴ س ص = م س + م ص = ٨ + ٦ = ١٤ سم

#

[رب إشرح لي صدري ويسر لي أمري]

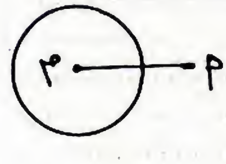
[اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً]

الدرس الثاني

موضع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

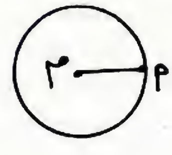
* موضع نقطة بالنسبة لدائرة

① أ خارج الدائرة



يكون $\boxed{\text{م أ > نق}}$

② أ على الدائرة



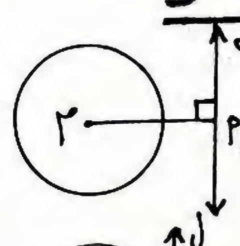
يكون $\boxed{\text{م أ = نق}}$

③ أ داخل الدائرة

يكون $\boxed{\text{م أ < نق}}$

* موضع مستقيم بالنسبة لدائرة :-

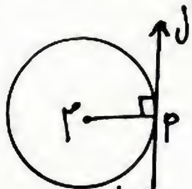
① خارج الدائرة



$\boxed{\text{م أ > نق}}$

ل ∩ الدائرة م = ∅

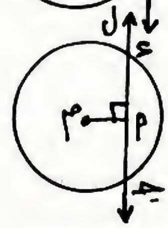
② مماس للدائرة



$\boxed{\text{م أ = نق}}$

ل ∩ الدائرة م = {أ}

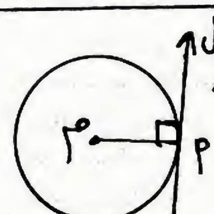
③ قاطع للدائرة



$\boxed{\text{م أ < نق}}$

ل ∩ الدائرة م = {ء ، جـ}

نتيجة ①



(المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس)

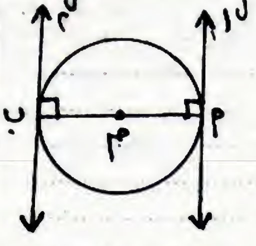
∴ ل مماس للدائرة عند أ ، م أ نصف قطر

∴ ق(∠أ) = ٩٠°

نتيجة ②

المستقيم العمودي على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً للدائرة

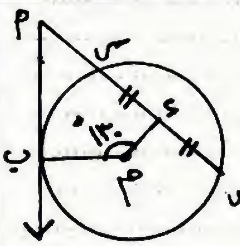
نتيجة ③



(المماسان للدائرة المرسومان من نهايتي قطر فيها يكونان متوازيان)

أي أن ل١ // ل٢

مثال ① في الشكل المقابل



أب مماس للدائرة م عند ب ، ء منتصف س ص ، ق(∠ء م ب) = ١٣٠°

أوجد ق(∠أ)

البرهان

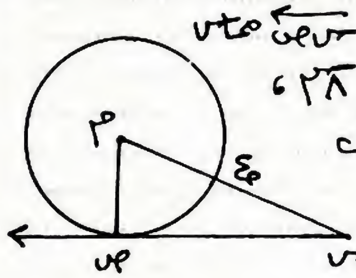
∵ ء منتصف س ص

∴ ق(∠ء) = ٩٠°

∵ أب مماس ، م ب نصف قطر ∴ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٣٠°) = ٥٠° #

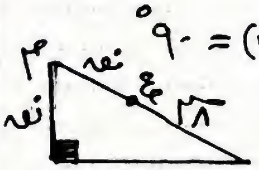
مثال ② في الشكل المقابل س ص مماس للدائرة عند ص ، ع ∈ س م = ٨ ، س ص = ١٢ أحسب طول نصف قطر الدائرة م



البرهان

∵ س ص مماس ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

في Δ س ص م القائم في ص



باستخدام نظرية فيثاغورث

(س م)² = (س ص)² + (م ص)²

(٨ + نق)² = (١٢)² + (نق)²

٦٤ + نق² + ١٦ نق = ١٤٤ + نق²

١٦ نق = ١٤٤ − ٦٤

١٦ نق / ١٦ = ٨٠ / ١٦

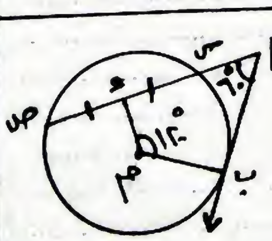
∴ نق = ٥ سم

∴ طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم

مثال ③ ء منتصف س ص

ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠م) = ١٢٠°

أثبت أن أب مماس للدائرة م عند نقطة ب



البرهان ∵ د منتصف $\overline{سص}$ ∴ ق($\hat{د}$) = 90°

∴ ق($\hat{ب}$) = $360^\circ - (60^\circ + 120^\circ + 90^\circ)$

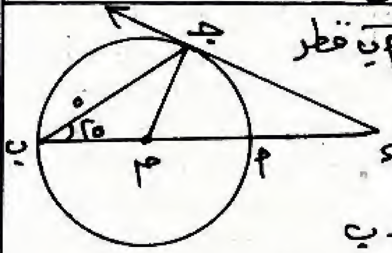
= 90° = زاوية قائمة

∴ $\overline{أب} \perp \overline{بم}$ عند نقطة ب

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب

مثال 4 $\overleftrightarrow{دج}$ مماس، $\overline{أب}$ قطر

ق($\hat{ب}$) = 25° أوجد ق($\hat{د}$)



البرهان في △مجب

∵ مج = مب = نق

∴ ق(∠مجب) = ق($\hat{ب}$) = 25°

∵ $\overleftrightarrow{دج}$ مماس، $\overline{مج}$ نصف قطر

∴ ق(∠دجم) = 90°

∴ ق(∠دجب) = $90^\circ + 25^\circ = 115^\circ$

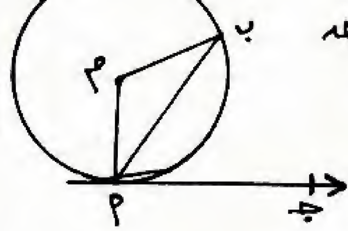
في △دجب

ق($\hat{د}$) = $180^\circ - (115^\circ + 25^\circ) = 180 - 140$

= 40° #

مثال 5 $\overleftrightarrow{أج}$ مماس للدائرة عند أ

ق(∠أبم) = 40° أوجد ق(∠بأج)



البرهان

في △مبأ

∵ مب = مأ = نق

∴ ق(∠بأم) = ق(∠أبم) = 40°

∵ $\overleftrightarrow{أج}$ مماس، $\overline{أم}$ نصف قطر

∴ ق(∠جأم) = 90°

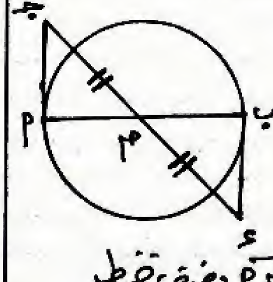
∴ ق(∠بأج) = $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

مثال 6 في الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أج}$ مماس للدائرة عند أ

جم = مد أثبت أن

$\overleftrightarrow{بد}$ مماس للدائرة م عند ب



البرهان ∵ $\overleftrightarrow{أج}$ مماس، $\overline{مأ}$ نصف قطر

∴ ق($\hat{أ}$) = 90°

△△ مبد، مأج

فيهما { مد = مج معطى، مب = مأ = نق، ق(∠دمب) = ق(∠جمأ) بالتقابل بالرأس }

∴ △دبم ≡ △جأم وينتج أن

ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{ب}$) = 90°

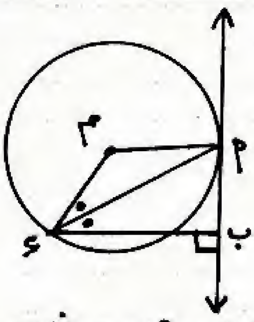
∴ $\overline{بد} \perp \overline{مب}$ ∴ $\overleftrightarrow{بد}$ مماس للدائرة م عند ب

مثال 7 في الشكل المقابل

ق(∠مدأ) = ق(∠أدب)

$\overline{دب} \perp \overleftrightarrow{أب}$ أثبت أن

$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ



البرهان في △مأد ∵ مأ = مد = نق

∴ ق(∠مأد) = ق(∠مدأ) ⟵ (1)

∵ ق(∠مدأ) = ق(∠أدب) ⟵ معطى (2)

من (1)، (2) ينتج أن

ق(∠مأد) = ق(∠أدب) وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{مأ} \parallel \overline{بد}$

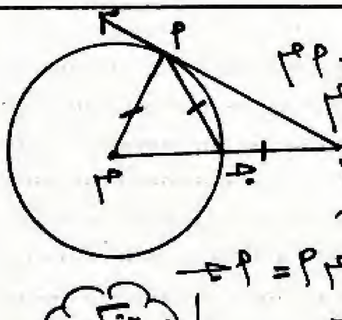
∴ ق(∠بأم) = ق($\hat{ب}$) = 90° بالتناظر

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overline{أم}$ من عند أ

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

مثال 8 بج = جأ = أم

إثبت أن $\overleftrightarrow{بأ}$ مماس للدائرة م



البرهان

∵ مأ = مج = نق

∴ بج = جم = مأ = أج

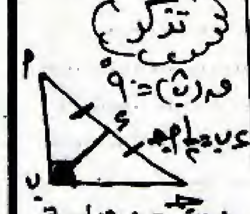
∴ أج = $\frac{1}{2}$ بم

∴ $\overline{أج}$ خارج من زاوية قائمة

ق($\hat{أ}$) قائمة ∴ $\overleftrightarrow{بأ} \perp \overline{أم}$

∴ $\overleftrightarrow{بأ}$ مماس للدائرة م عند أ

#

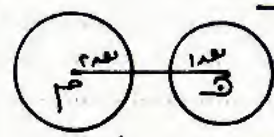


المتوسط الخارج من الزاوية القائمة = $\frac{1}{2}$ طول الوتر

الدرس الثالث

موضع دائرة بالنسبة لدائرة

(1) الدائرتان المتباعدتان :-

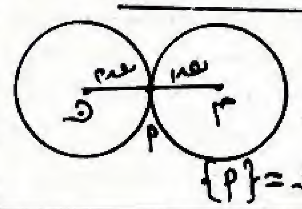


$\boxed{\text{م ن > نق}_1 - \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ

(2) الدائرتان المتماستان من الخارج :

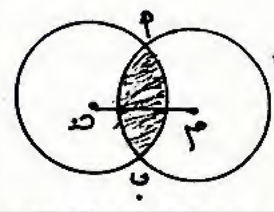


$\boxed{\text{م ن = نق}_1 + \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ}

(3) متقاطعتان :



$\boxed{\text{نق}_1 - \text{نق}_2 < \text{م ن} < \text{نق}_1 + \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = المنطقة المظللة

← أى دائرتين تتقاطعان فى نقطتين على الأكثر

(4) متماستان من الداخل :

$\boxed{\text{م ن = نق}_1 - \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة م (الصغرى)

(5) متداخلتان

$\boxed{\text{م ن} < \text{نق}_1 - \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن (الصغرى)

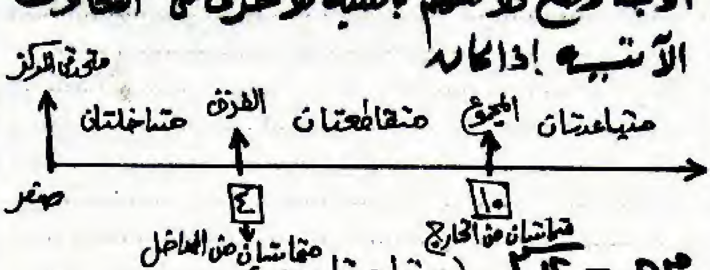
(6) متحدتى المركز

$\boxed{\text{م ن = صفر}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = الدائرة الصغرى ن (الصغرى)

← م ، ن دائرتان نصف قطر كلاً منهم ٧ ، ٣ أوجد وضع كلاً منهم بالنسبه للأخرى فى الحالات الآتيه إذا كانت



م ن = ١٢ (متباعدتان)

م ن = ١٠ (متماستان من الخارج)

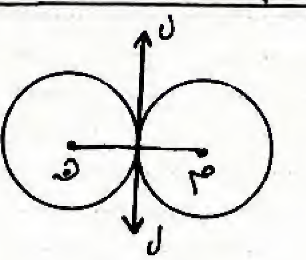
م ن = ٨ (متقاطعتان)

م ن = ٤ (متماستان من الداخل)

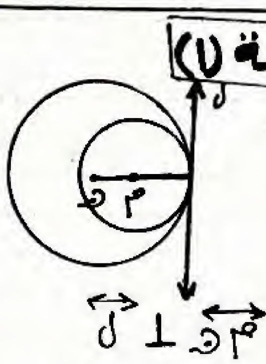
م ن = ٢ (متداخلتان)

م ن = صفر (متحدتى المركز)

نتيجة (1)



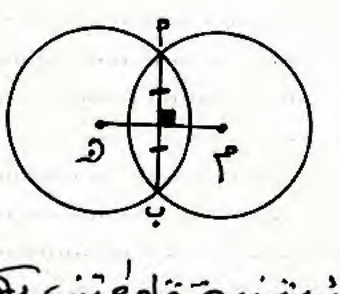
$\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$



$\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

« خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ويكون عمودياً على المماس المشترك عند نقطة التماس »

نتيجة (2)



$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين

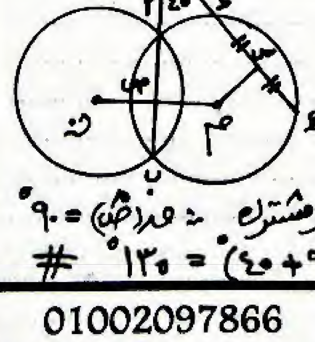
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

و ينصفه

« خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه »

مثال (1)



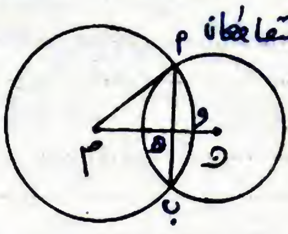
س منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$ ، ق(∠جـ) = ٤٠° أوجد ق(∠س م ص)

البرهان ∵ س منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ ق(∠م س) = ٩٠° ، ∵ $\overline{\text{م ن}}$ خط مركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

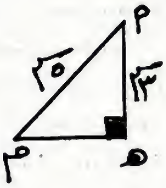
∴ ق(∠س م ص) = ٣٦٠° − (٩٠ + ٩٠ + ٤٠) = ١٣٠° #

مثال ② م ، ن دائرتان متقاطعتان



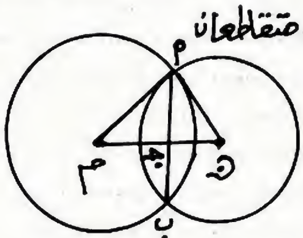
أ ب = ٦ سم ، م أ = ٥ سم ،
م ن = ٧ سم أوجد طول
أ هـ ، هـ و

البرهان ∵ م ن خط مركزين ، أ ب وتر مشترك
∴ م ن ⊥ أ ب وينصفه
∴ أ هـ = هـ ب = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ سم
في △ أ هـ م القائم في هـ



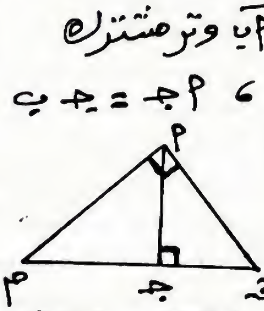
هـ م = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم
∴ هـ و = ٥ − ٤ = ١ سم #
حيث م أ = م و = نق = ٥ سم

مثال ③ م ، ن دائرتان متقاطعتان



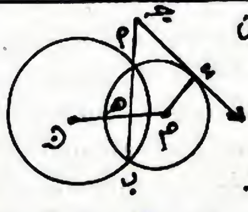
في أ ، ب م أ = ٦ سم ،
ن أ = ٨ سم ، م ن = ١٠ سم
فأوجد طول أ ب

البرهان في △ ن أ م
(ن م)^٢ = (١٠)^٢ = ١٠٠ سم
(ن أ)^٢ + (أ م)^٢ = (٨)^٢ + (٦)^٢ = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠
∴ (ن م)^٢ = (ن أ)^٢ + (أ م)^٢ (بعكس فيثاغورث)
∴ △ ن أ م قائم في أ
∵ م ن خط مركزين ، أ ب وتر مشترك
∴ م ن ⊥ أ ب ، أ جـ = جـ ب
في △ ن أ م القائم في أ
∵ أ جـ ⊥ ن م



من نظرية إقليدس
أ جـ = $\frac{\text{ن أ × أ م}}{\text{ن م}}$ = $\frac{٨ \times ٦}{١٠}$ = ٤٫٨ سم
∴ أ ب = ٢ × أ جـ = ٢ × ٤٫٨ = ٩٫٦ سم #

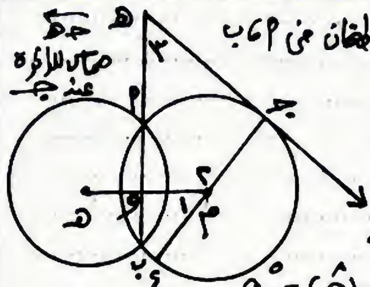
مثال ④ م ، ن دائرتان متقاطعتان



في أ ، ب ، ق(∠ء م هـ) = ١٢٠°
ق(∠جـ) = ٥٥° إثبت أن
جـ ء مماس للدائرة م عند ء

البرهان ∵ م ن خط مركزين ، أ ب وتر مشترك
∴ ق(∠هـ) = ٩٠°
∴ ق(∠ء) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ٥٥° + ٩٠°)
= ٣٦٠° − ٢٧٠° = ٩٠°
∴ م ء ⊥ ء جـ
∴ جـ ء مماس للدائرة م عند ء

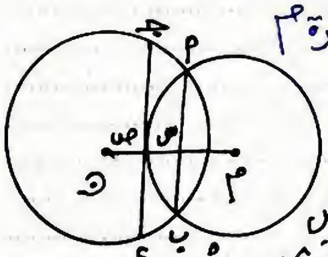
مثال ⑤ م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب



جـ ء قطر إثبت أن
ق(∠ء م ن) = ق(∠جـ هـ ب)

البرهان ∵ جـ هـ مماس ،
م جـ نصف قطر ∴ ق(∠جـ) = ٩٠°
∵ م ن خط المركزين ، أ ب وتر مشترك
∴ ق(∠و) = ٩٠°
∵ ق(∠جـ) + ق(∠و) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°
في الشكل الرباعي هـ جـ م و
ق(∠٣) + ق(∠٢) = ٣٦٠° − ١٨٠° = ١٨٠°
∴ ق(∠٣) + ق(∠٢) = ١٨٠° ⟵ ①
ق(∠٢) + ق(∠١) = ١٨٠ ⟵ ② خط مستقيم
من ① ، ② ينتج أن
ق(∠٣) = ق(∠١)
∴ ق(∠ء م ن) = ق(∠جـ هـ ب) #

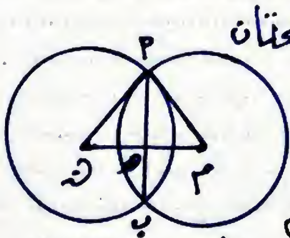
مثال ⑥ جـ ء مماس للدائرة م



عند ص إثبت أن
أ ب // جـ ء

البرهان ∵ م ن خط مركزين
، أ ب وتر مشترك ∴ ق(∠س) = ٩٠°
∵ جـ ء مماس ، م ص نصف قطر ∴ ق(∠ص) = ٩٠°
∴ ق(∠س) = ق(∠ص) وهما في وضع تناظر
∴ أ ب // جـ ء

مثال ⑦ م ، ن دائرتان متقاطعتان

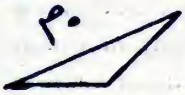


في أ ، ب ومتطابقتان
إثبت أن م هـ = هـ ن

البرهان ∵ م ن خط مركزين
، أ ب وتر مشترك ∴ ق(∠هـ) = ٩٠°
△△ أ هـ م ، أ هـ ن (نثبت تطابقهما)

فيهما { م أ = م هـ = نق
م هـ ضلع مشترك
ق(∠ م ء هـ) = ق(∠ م هـ ف) = ٩٠°

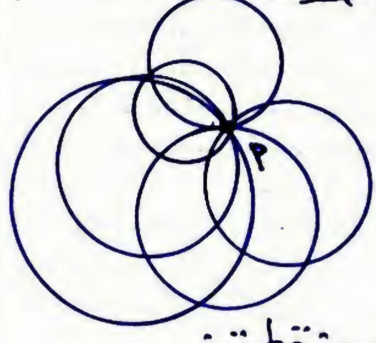
∴ Δ م هـ ء ≡ Δ م هـ ف وينتج أن
∴ $\boxed{\text{هـ ء = هـ ف}}$ #

المثلث المنفرج	المثلث القائم	المثلث الحاد الزوايا
		
مركز الدائرة الخارجة عنه تقع خارج المثلث	مركز الدائرة الخارجة عنه يقع في منتصف الوتر	مركز الدائرة داخل المثلث

الدرس الرابع : [تعيين الدائرة]

١ رسم دائرة تمر بنقطة واحدة :

← يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطة واحدة.



٢ رسم دائرة تمر بنقطتين

← يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطتين

← مركز هذه الدوائر يقع على محور تماثل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

← مركز أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

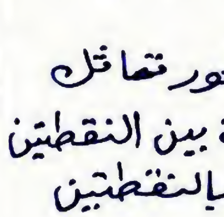
٣ رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

أ تقع على استقامة واحدة

← عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة = صفر

ب ليست على استقامة واحدة.

← يمكن رسم دائرة واحدة



← مركز الدائرة الخارجة عن المثلث هي نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه [أو الأعمدة المقامة من منتصفات أضلاعه]

← مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع متوسطات أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية وهي نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته.

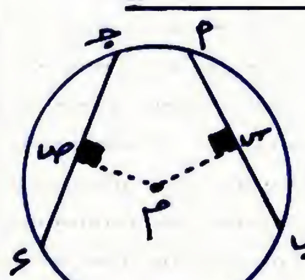
مثال (١) ارسم $\overline{\text{أب}}$ طولها ٦ سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقطتين أ ، ب والتي نصف قطرها ٤ سم (كم عدد الحلول الممكنة)

مثال (٢) ارسم Δ أ ب جـ حيث أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أ جـ = ٧ سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

الدرس الخامس :-

[علاقة أوتار الدائرة بمركزها]

نظرية



[الأوتار المتساوية في الطول في دائرة تكون على أبعاد متساوية من مركزها]

عكس النظرية

[في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول]

∵ أ ب = جـ ء وتر = وتر

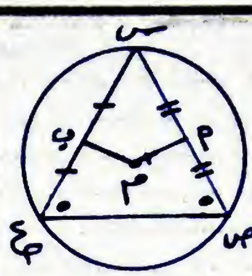
∴ م س = م ص بعد = بعد

والعكس ∵ م س = م ص بعد = بعد

∴ أ ب = جـ ء وتر = وتر

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

مثال (١)



أ منتصف س ص ، ب منتصف س ع ، ق(ص̂) = ق(ع̂) إثبت أن م أ = م ب

البرهان ∵ أ منتصف س ص ∴ ق(أ̂) = ٩٠°

∵ ب منتصف س ع ∴ ق(ب̂) = ٩٠°

∵ ق(ص̂) = ق(ع̂) ∴ Δ س ص ع متساوي الساقين ∴ س ص = س ع وتر = وتر

∴ م أ = م ب بعد = بعد #

مثال (٢)

س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ ، أ ب = أ جـ

إثبت أن د س = هـ ص

البرهان ∵ س منتصف أ ب ∴ ق(س̂) = ٩٠° ، ∵ ص منتصف أ جـ ∴ ق(ص̂) = ٩٠°

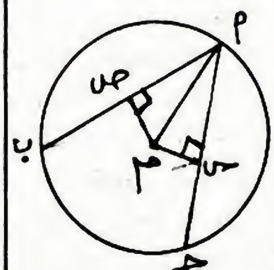
∵ أ ب = أ جـ وتر = وتر ∴ م س = م ص (١) بعد = بعد

∵ م د = م هـ = نق (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج أن

د س = هـ ص #

مثال (٣)



أ ب ، أ جـ وتران متساويان في الطول

م س ⊥ أ جـ ، م ص ⊥ أ ب

إثبت أن ق(س أ̂ م) = ق(ص أ̂ م)

البرهان ∵ م س ⊥ أ جـ ∴ س منتصف أ جـ

∵ م ص ⊥ أ ب ∴ ص منتصف أ ب

∵ أ ب = أ جـ معطى ∴ ½ أ ب = ½ أ جـ

∴ أ س = أ ص

∵ أ ب = أ جـ وتر = وتر

∴ م س = م ص بعد = بعد

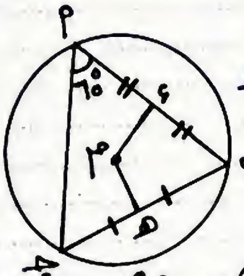
في ΔΔ أ م س ، أ م ص

فيهما { أ س = أ ص ، م س = م ص بعد = بعد ، أ م ضلع مشترك

∴ Δ أ س م ≡ Δ أ ص م وينتج من التطابق أن

ق(س أ̂ م) = ق(ص أ̂ م) #

مثال (٤)



ق(أ̂) = ٦٥° ، د ، هـ منتصفا أ ب ، ب جـ ، م د = م هـ

أوجد ق(ب̂)

البرهان ∵ د منتصف أ ب ∴ ق(د̂) = ٩٠°

∵ هـ منتصف ب جـ ∴ ق(هـ̂) = ٩٠°

∵ م د = م هـ معطى بعد = بعد

∴ أ ب = ب جـ وتر = وتر

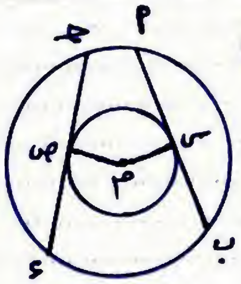
∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين

∴ ق(أ̂) = ق(جـ̂) = ٦٥°

∴ ق(ب̂) = ١٨٠ − (٦٥° + ٦٥°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° #

مثال (٥)



دائرتان متحدتا المركز م

إثبت أن أ ب = جـ د

البرهان في الدائرة الصغرى م

م س = م ص = نق

في الدائرة الكبرى م

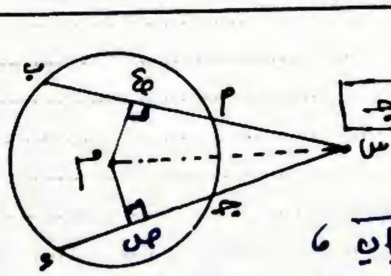
∵ أ ب مماس ∴ م س ⊥ أ ب

∵ جـ د مماس ∴ م ص ⊥ جـ د

∵ م س = م ص بعد = بعد

∴ أ ب = جـ د وتر = وتر #

مثال (٦)



أ ب = جـ د

إثبت أن س أ = س جـ

البرهان

العمل نرسم م ع ⊥ أ ب ،

نرسم م ص ⊥ جـ د ، نصل س م

∵ أ ب = جـ د وتر = وتر ∴ م ع = م ص بعد = بعد

ΔΔ س ع م ، س ص م فيهما

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \text{م ع = م ص \quad بعد = بعد} \\ \text{س م ضلع مشترك} \\ \text{ق}(\hat{\text{ع}}) = \text{ق}(\hat{\text{ص}}) = 90^\circ \end{array} \right.$

∴ Δ س ع م ≡ Δ س ص م ينتج أن

س ع = س ص ← ①

∵ أ ب = جـ ء ∴ ½ أ ب = ½ جـ ء

∴ أ ع = جـ ص ← ②

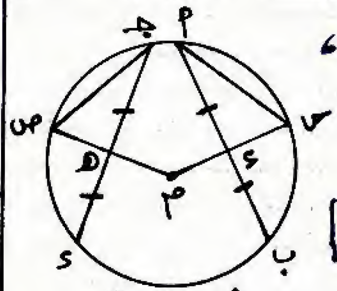
بطرح ② من ① ينتج أن

س أ = س جـ #

مثال ٧ ع منتصف $\overline{\text{أب}}$ ،

هـ منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ ،

أ ب = جـ ء



إثبت أن $\boxed{\text{أ س = جـ ص}}$

$\boxed{\text{البرهان}}$ ∵ ع منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ ق($\hat{\text{ع}}$) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ ∴ ق($\hat{\text{هـ}}$) = ٩٠°

∵ أ ب = جـ ء   وتر = وتر

∴ م ع = م هـ   بعد = بعد ← ①

∵ م س = م ص = نق ← ②

بطرح ② من ① ينتج أن

$\boxed{\text{س ع = ص هـ}}$

∵ أ ب = جـ ء ∴ ½ أ ب = ½ جـ ء

∴ $\boxed{\text{أ ع = جـ هـ}}$

Δ Δ أ ع س ، جـ هـ ص

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \text{أ ع = جـ هـ} \\ \text{س ع = ص هـ} \\ \text{ق}(\hat{\text{ع}}) = \text{ق}(\hat{\text{هـ}}) = 90^\circ \end{array} \right.$

∴ Δ أ ع س ≡ Δ جـ هـ ص

وينتج أن $\boxed{\text{أ س = جـ ص}}$ #

(Maths is Great SubJect)

مثال ٨ م ، ن دائرتان متقاطعتان في جـ ، ء

و منتصف $\overline{\text{أب}}$ ،

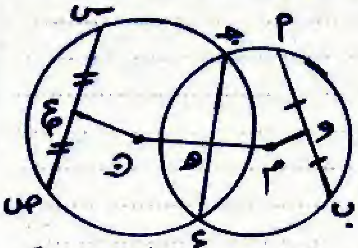
ع منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ،

و م = م هـ ،

ن هـ = ن ع

إثبت أن

أ ب = س ص



$\boxed{\text{البرهان}}$ ∵ و منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ ق($\hat{\text{و}}$) = ٩٠°

∵ ع منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ∴ ق($\hat{\text{ع}}$) = ٩٠°

∵ م و = م هـ   بعد = بعد

∴ أ ب = جـ ء   وتر = وتر ← ①

∵ ن هـ = ن ع   بعد = بعد

∴ جـ ء = س ص   وتر = وتر ← ②

من ① ، ② ينتج أن

$\boxed{\text{أ ب = س ص}}$ #

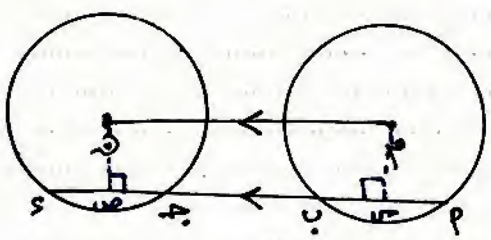
مثال ٩

م ، ن دائرتان متطابقتان

$\overline{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ء}}$

إثبت أن

أ جـ = ب ء



$\boxed{\text{البرهان}}$

$\boxed{\text{العمل}}$ نرسم $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$

∵ $\overline{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ∴ م س ص ن مستطيل

∴ م س = ن ص   بعد = بعد

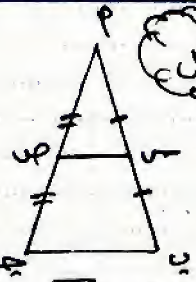
∴ أ ب = جـ ء   وتر = وتر

بإضافة $\overline{\text{ب جـ}}$ للطرفين

أ ب + ب جـ = جـ ء + ب جـ

∴ أ جـ = ء ب #

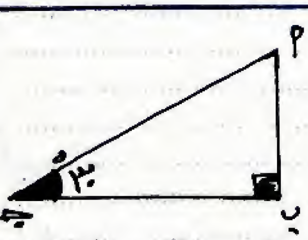
تذكر



س منتصف $\overline{\text{أب}}$

ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ س ص = ½ ب جـ



∵ ق($\hat{\text{ب}}$) = ٩٠° ، ق($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

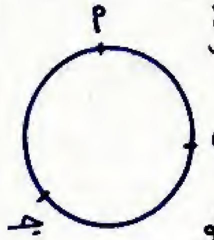
∴ $\boxed{\text{أ ب = ½ أ جـ}}$

(الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوي ½ طول الوتر)

الوحدة الخامسة

١ [الزوايا والأقواس]

القوس: هو جزء من الدائرة محدد بنقطتين على الدائرة ويرمز له بالرمز



(أب⌒) أو (ب جـ⌒) أو (أ جـ⌒) أو

(أ ب جـ⌒) أو (ب جـ أ⌒) أو (ب أ جـ⌒)

قياس الدائرة = ٣٦٠°

قياس أي جزء في الدائرة = الجزء × ٣٦٠°

مثال: قياس نصف الدائرة

= ½ × ٣٦٠° = ١٨٠°

قياس ⅓ دائرة

= ⅓ × ٣٦٠° = ١٢٠°

قياس ¼ دائرة

= ¼ × ٣٦٠° = ٩٠°

محيط الدائرة = ٢ ط نق

محيط أي جزء من الدائرة = الجزء × ٢ ط نق

مثال: نصف طول الدائرة

= ½ × ٢ ط نق = ط نق سم

¼ طول الدائرة

= ¼ × ٢ ط نق = ط نق / ٢ = ½ ط نق

نتائج هامة:-

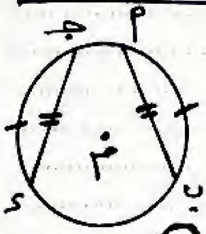
← في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة

١ الأقواس المتساوية في الطول تكون متساوية في القياس والعكس صحيح

∵ ق(أب⌒) = ق(جـ ء⌒)

∴ طول أب⌒ = طول جـ ء⌒

٢ الوتران المتساويان يحصران قوسان متساويان في القياس



∵ أب = جـ ء

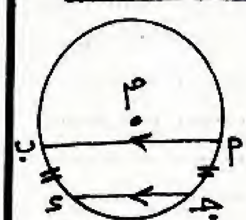
فإن ق(أب⌒) = ق(جـ ء⌒)

والعكس إذا كان ق(أب⌒) = ق(جـ ء⌒)

∴ أب = جـ ء

∴ وتر = وتر (والعكس) قوس = قوس

٣ الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس.

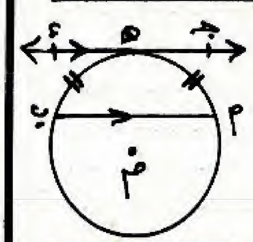


∵ أب // جـ ء

∴ ق(أ جـ⌒) = ق(ب ء⌒)

والعكس صحيح

٤ القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس



∵ جـ ء مماس ، أب وتر

∵ جـ ء // أب

∴ ق(أ هـ⌒) = ق(هـ ب⌒)

العلاقة بين طول القوس وقياس القوس:-

طول القوس = (قياس القوس / ٣٦٠°) × ٢ ط نق

حيث نق هو نصف القطر ، ط = ٢٢/٧

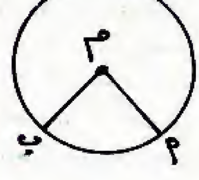
مثال ١ أوجد قياس القوس الذي يمثل ⅓ قياس الدائرة وإذا كان نصف قطر الدائرة ١٥ سم أوجد طول هذا القوس (ط = ٣,١٤) الحل

قياس القوس = ⅓ × ٣٦٠° = ١٢٠°

طول القوس = (قياس القوس / ٣٦٠°) × ٢ ط نق

= (١٢٠ / ٣٦٠°) × ٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٣١,٤ سم #

* الزاوية المركزية :-



هي زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار في الدائرة

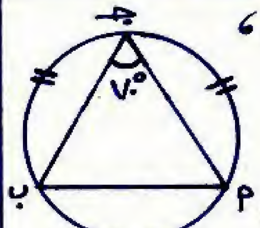
∠ أ م ب زاوية مركزية

* قياس القوس : يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس

أي أن ق(∠أ م ب) = ق(⌒أب)

مثال ② ق(⌒أجـ) = ق(⌒ب جـ) ، ق(∠أ جـ ب) = ٧٠°

أوجد ق(∠أ ب جـ)



البرهان ∵ ق(⌒أجـ) = ق(⌒ب جـ) قوس = قوس

∴ أ جـ = ب جـ وتر = وتر

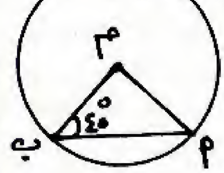
∴ Δ أ جـ ب متساوي الساقين

∴ ق(∠جـ أ ب) = ق(∠أ ب جـ) = (١٨٠ − ٧٠) / ٢

= ٥٥° #

مثال ③ ق(∠م ب أ) = ٤٥° ،

أ م = √٧ أوجد طول ⌒أب (π = ٢٢/٧)



البرهان في Δ م أ ب

∵ م أ = م ب = نق ∴ Δ م أ ب متساوي الساقين

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥°

∴ ق(∠أ م ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°

∴ ق(⌒أب) = ق(∠أ م ب) = ٩٠°

∴ طول ⌒أب = ق(⌒أب) / ٣٦٠° × ٢ π نق

= ٩٠ / ٣٦٠° × ٢ × ٢٢/٧ × ٧

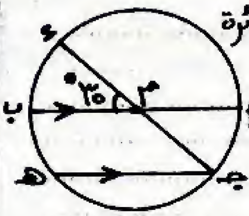
= √١١ #

[السؤال نصف العلم والمعرفة]

فلا تخجل من السؤال أو كثرة الأسئلة

مثال ④ أب ، جـ د قطران في الدائرة م بحيث ق(∠د م ب) = ٣٥° ،

جـ هـ // أب أوجد ق(⌒ب هـ)



البرهان ∵ ق(∠د م ب) = ق(∠أ م جـ) = ٣٥° بالتقابل بالرأس

∵ أب // جـ هـ وتر // وتر

∴ ق(⌒أجـ) = ق(⌒ب هـ) قوس = قوس

∵ ق(⌒أجـ) = ق(∠أ م جـ) = ٣٥°

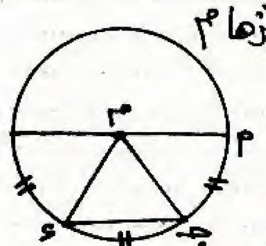
∴ ق(⌒ب هـ) = ٣٥° #

مثال ⑤ أب قطر في الدائرة التي مركزها م

ق(⌒أجـ) = ق(⌒جـ د) = ق(⌒د ب)

إثبت أن

Δ م جـ د متساوي الأضلاع



البرهان ∵ أب قطر في الدائرة م

∴ ق(⌒أجـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(⌒أجـ) = ق(⌒جـ د) = ق(⌒د ب) = ١٨٠ / ٣ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ م د) = ٦٠° المركزية

في Δ م جـ د ∵ م جـ = م د

∴ ق(∠جـ) = ق(∠د) = (١٨٠ − ٦٠) / ٢ = ٦٠°

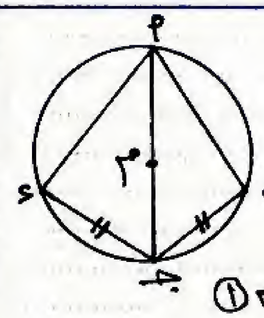
∴ ق(∠جـ) = ق(∠د) = ق(∠جـ م د) = ٦٠°

∴ Δ م جـ د متساوي الأضلاع

مثال ⑥ أ ب جـ د شكل رباعي ،

أجـ قطر في الدائرة ، جـ ب = جـ د

إثبت أن ق(⌒أب) = ق(⌒أد)



البرهان ∵ أجـ قطر في الدائرة م

∴ ق(⌒أب جـ) = ق(⌒أ د جـ) ← ①

∵ ب جـ = جـ د وتر = وتر

∴ ق(⌒ب جـ) = ق(⌒د جـ) ← ② قوس = قوس

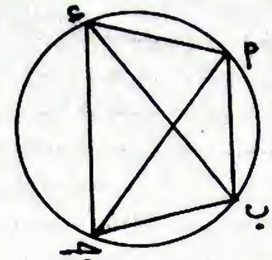
بطرح ② من ①

∴ ق(⌒أب) = ق(⌒أد) قوس = قوس

∴ أ ب = أ د وتر = وتر #

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

مثال ٧ في الشكل المقابل



أجـ = ب ء

فأثبت أن أ ء = ب جـ

البرهان ∵ أجـ = ب ء

وتر = وتر

∴ ق(أب جـ) = ق(ب أ ء)

بطرح ق(أ ب) من الطرفين

ينتج أن

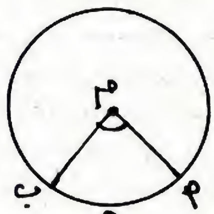
ق(أ ء) = ق(ب جـ) قوس = قوس

∴ أ ء = ب جـ وتر = وتر #

الدرس الثاني :-

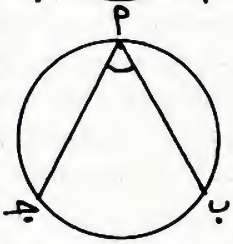
العلاقة بين الزاوية المحيطية والمركزية والمماسية المشتركة معاً في القوس

١ الزاوية المركزية :-



هي زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار في الدائرة.

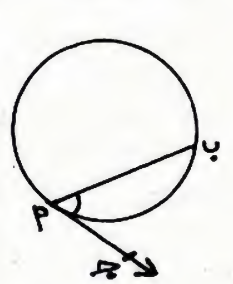
٢ الزاوية المحيطية :-



هي زاوية رأسها تقع على الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة

∠ ب أ جـ محيطية

٣ الزاوية المماسية :-



هي زاوية رأسها على الدائرة وضلعاها وتر ومماس مرسوم من أحدى نهايتي الوتر في الدائرة

∠ ب أ جـ مماسية تقابل أب

نظرية ١

قياس الزاوية المحيطية = ½ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية المحيطية = ½ قياس القوس المقابل لها.

∵ ق(ب أ جـ) = ½ ق(ب م جـ)

المحيطية = ½ المركزية

ق(ب أ جـ) = ½ ق(ب جـ)

ق(ب م جـ) = ق(ب جـ)

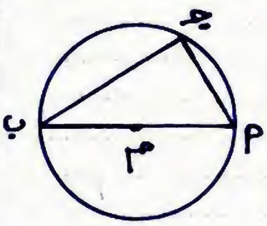
نظرية ٢

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس

∠ أ ، ∠ ب ، ∠ جـ زوايا محيطية مرسومة على نفس القوس ءهـ

∴ ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)

نتيجة هامة :-



الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

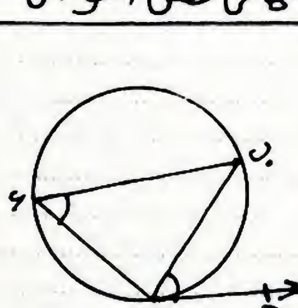
∵ أب قطر في الدائرة م

∴ ق(أ جـ ب) = ٩٠° قائمة

ملاحظات

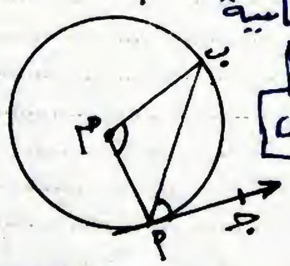
* قياس القوس يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المحصور بين ضلعيها
* قياس الزاوية المركزية تساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

نظرية ٣



قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

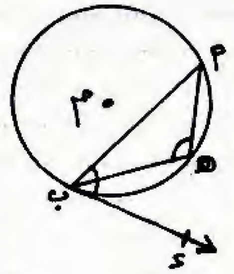
ق(ء) المحيطية = ق(ب أ جـ) المماسية



نتيجة قياس الزاوية المماسية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

½ ق(ب م أ) = ق(ب أ جـ)

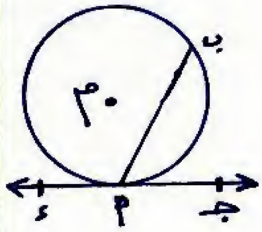
ملاحظة



الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفي جهة واحدة منه.

ق(∠أ هـ ب) المحيطية + ق(∠أ ب ء) المماسية = ١٨٠°

ملاحظة

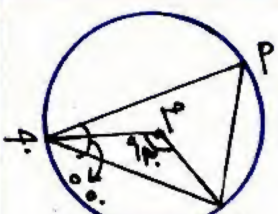


قياس الزاوية المماسية = ½ قياس القوس المحصور بين ضلعيها

ق(∠ب أ جـ) = ½ ق(⌢أ ب) الأصغر

ق(∠ب أ ء) = ½ ق(⌢أ ب) الأكبر

مثال ① ق(∠ب م جـ) = ١٣٠°، ق(∠أ جـ ب) = ٥٠° أوجد ق(∠أ ب جـ)



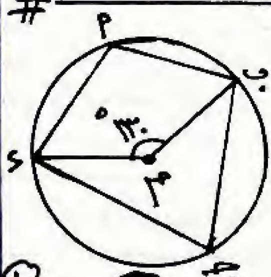
البرهان ∵ ∠أ محيطية، ∠م مركزية مشتركتان في ⌢ب جـ

∴ ق(∠أ) = ½ ق(∠ب م جـ) = ٦٥°

في △ أ ب جـ

ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠ − (٦٥° + ٥٠°) = ٦٥° #

مثال ② ق(∠ب م ء) = ١٣٠°



أوجد ق(∠ب جـ ء)، ق(∠ب أ ء)

البرهان ق(∠ب جـ ء) = ½ ق(∠ب م ء) = ٦٥° ① #

محيطية ومركزية مشتركتان في ⌢ب أ ء

∴ ق(⌢ب أ ء) = ٢ ق(∠جـ) = ١٣٠°

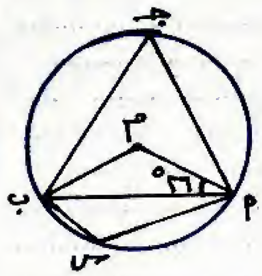
∴ ق(⌢ب جـ ء) = ٣٦٠ − ١٣٠ = ٢٣٠°

∵ ∠ب أ ء محيطية تقابل ⌢ب جـ ء

∴ ق(∠ب أ ء) = ½ ق(⌢ب جـ ء) = #

= ½ × ٢٣٠ = ١١٥°

مثال ③ ق(∠م أ ب) = ٢٦°



أوجد بالبرهان

① ق(∠أ م ب) ② ق(∠أ جـ ب)

③ ق(∠أ س ب) ④ ق(⌢أ س ب)

البرهان ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠م أ ب) = ق(∠م ب أ) = ٢٦°

∴ ق(∠أ م ب) = ١٨٠ − (٢٦° + ٢٦°) = ١٢٨° # ①

∴ ق(∠أ جـ ب) = ½ ق(∠أ م ب) = ٦٤°

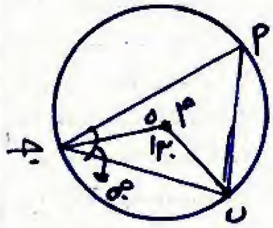
محيطية ومركزية مشتركتان في ⌢أ س ب

∴ ق(∠أ م ب) = ق(⌢أ س ب) = ١٢٨°

∴ ق(⌢أ جـ ب) = ٣٦٠ − ١٢٨ = ٢٣٢°

∴ ق(∠أ س ب) = ½ ق(⌢أ جـ ب) = ١١٦°

مثال ④ ق(∠ب م جـ) = ١٣٠°،



ق(∠أ جـ ب) = ٥٠°

أوجد ق(∠أ ب جـ).

البرهان ∵ ∠أ محيطية،

∠ب م جـ مركزية قياسها = ١٣٠ ومشتركتان في ⌢ب جـ

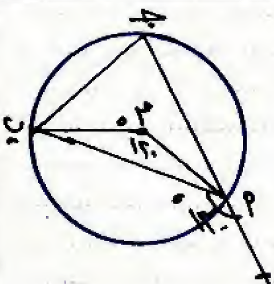
∴ ق(∠أ) = ½ ق(∠ب م جـ) = ٦٥°

في △ أ ب جـ

ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠ − (٦٥° + ٥٠°)

= ١٨٠ − ١١٥ = ٦٥° #

مثال ⑤ ق(∠ب أ ء) = ١٣٠°،



ق(∠أ م ب) = ١٢٠° أوجد ق(∠م ب جـ)

الحل

في △ أ م ب ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠م ب أ) = (١٨٠ − ١٢٠)/٢ = ٣٠°

∴ ق(∠جـ) = ½ ق(∠م) = ٦٠° محيطية ومركزية مشتركتان في ⌢أ ب

∵ ∠ء أ ب خارجة عن △ أ جـ ب

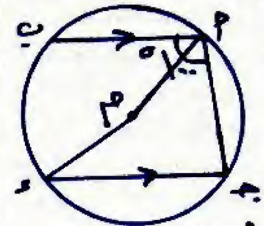
∴ ق(∠أ ب جـ) = ١٣٠ − ٦٠ = ٧٠°

∴ ق(∠م ب جـ) = ٧٠ − ٣٠ = ٤٠° #

مثال 6 ق(∠ب أ جـ) = 100°

أب // جـ د أوجد

ق(∠أ م د)



البرهان ∵ أب // جـ د

∴ ق(∠جـ) = 180 − 100 = 80° بالتداخل

∴ ق(∠أ م د) = 2ق(∠جـ) = 2 × 80° = 160°

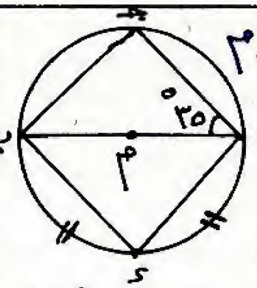
لأنهما محيطية ومركزية مشتركتان في (أد)

مثال 7 أب قطر في الدائرة م

طول(أد) = طول(ب د)

ق(∠جـ أ ب) = 35°

أوجد بالبرهان ق(∠جـ ب د)



البرهان ∵ أب قطر ∴ ق(∠أ جـ ب) = 90° قائمة

لأنها محيطية مرسومة على القطر

∴ ق(∠أ ب جـ) = 180° − (90° + 35°) = 55°

∴ ق(أد) = ق(د ب) = $\frac{180}{2}$ = 90°

∴ ق(∠أ ب د) = $\frac{1}{2}$ ق(أد) = 45°

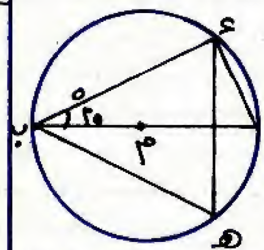
لأنها محيطية تقابل أد تساوي نصفه

∴ ق(∠جـ ب د) = 55° + 45° = 100° #

مثال 8 أب قطر في الدائرة م

ق(∠أ ب د) = 25°

أوجد ق(∠د هـ ب) بالبرهان



البرهان ∵ أب قطر

∴ ق(∠أ د ب) = 90° محيطية مرسومة على القطر

∴ ق(∠د أ ب) = 180° − (90° + 25°) = 65°

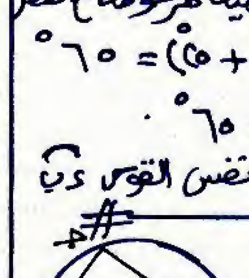
∴ ق(∠د أ ب) = ق(∠د هـ ب) = 65°

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس د ب

مثال 9 أب = أجـ

اثبت أن

ق(∠أ هـ ب) = ق(∠أ هـ جـ)



البرهان ∵ أب = أجـ وتر = وتر

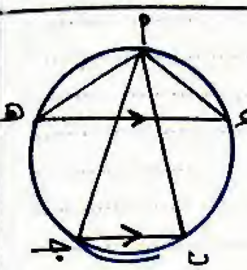
∴ ق(أب) = ق(أجـ) قوس = قوس

∴ ق(∠أ هـ ب) = ق(∠أ هـ جـ) #

لأنهما محيطيتان تقابلان أقواساً متساوية #

مثال 10 د هـ // ب جـ

إثبت أن ق(∠د أ جـ) = ق(∠ب أ هـ)



البرهان ∵ د هـ // ب جـ

∴ ق(د ب) = ق(هـ جـ)

∴ ق(∠د أ ب) = ق(∠هـ أ جـ) محيطيتان على أقواس متساوية

بإضافة ق(∠ب أ جـ) للطرفين

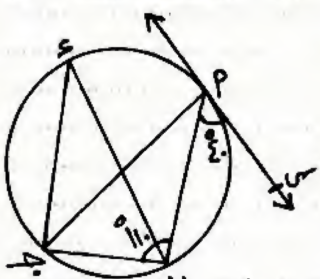
∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠هـ أ ب) #

مثال 11 أس مماس ،

ق(∠س أ ب) = 40° ،

ق(∠أ ب جـ) = 110°

أوجد ق(∠جـ د ب)



البرهان ∵ ق(∠ب جـ أ) = ق(∠س أ ب) = 40°

محيطية ومماسية مشتركتان في أب

في Δ أ ب جـ ق(∠ب أ جـ) = 180 − (110 + 40)

= 30°

∴ ق(∠ب د جـ) = ق(∠ب أ جـ) = 30°

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس ب جـ

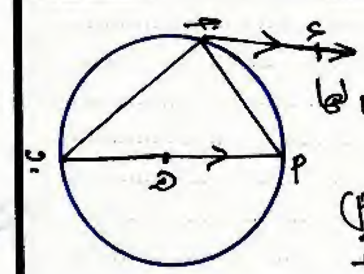
مثال 12 أب قطر في دائرة

محيطها 44 سم ، جـ د مماس لها

عند جـ ، جـ د // ب أ

أوجد مع البرهان ① ق(∠د جـ أ)

② طول أجـ



البرهان ∵ جـ د مماس // أب قطر

∴ ق(أجـ) = ق(جـ ب) = $\frac{180}{2}$ = 90°

∴ ق(∠د جـ أ) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق(أجـ) = $\frac{1}{2}$ × 90 = 45° ① #

ق(أجـ) = 90°

∴ طول أجـ = $\frac{\text{قياس القوس}}{360}$ × المحيط (2 ط نق)

= $\frac{90}{360}$ × 44 = 11 سم

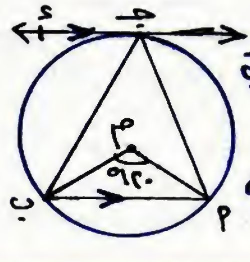
فكر $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}}}$ = ------

تمارين

① جـ ء مماس ، جـ ء // أ ب

ق(∠أ م ب) = ١٢٠°

أثبت أن △ جـ أ ب متساوي الأضلاع

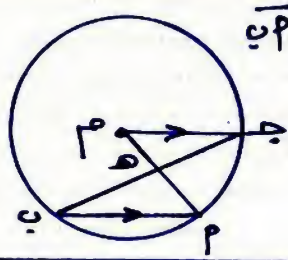


② أ ب وتر فيه جـ م // أ ب

، ب جـ ∩ أ م = {هـ}

أثبت أن

ب هـ > أ هـ



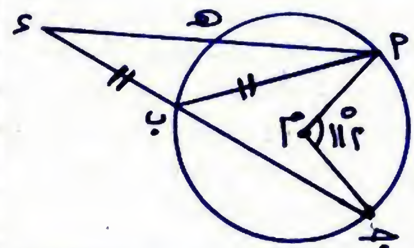
③ دائرة م

ق(∠أ م جـ) = ١١٢°

، أ ب = ء ب ،

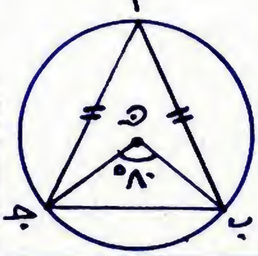
ب ∈ ء جـ

أوجد ق(∠ء)



④ أوجد ① ق(∠أ ب جـ)

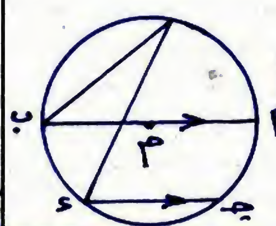
② ق(⌒ب جـ) الأكبر



⑤ أ ب قطر في الدائرة م

أ ب // جـ ء ، ق(⌒جـ ء) = ٨٠°

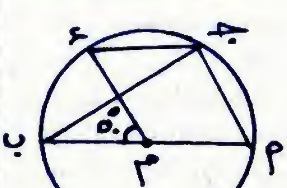
أوجد ق(∠هـ)



⑥ أ ب قطر في الدائرة م

ق(∠ب م ء) = ٥٠°

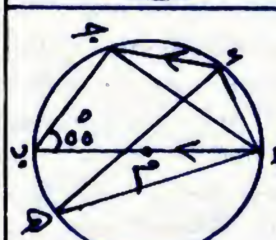
أوجد ق(∠أ جـ ء)



⑦ أ ب قطر ، ء جـ // أ ب

ق(∠أ ب جـ) = ٥٥°

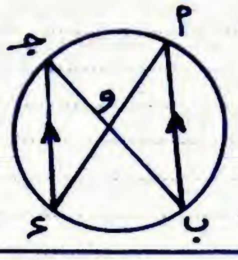
أوجد ق(∠أ هـ ء)



⑧ أ ب ، جـ ء وتران متوازيان في الدائرة ،

أ ء ∩ جـ ب = {و}

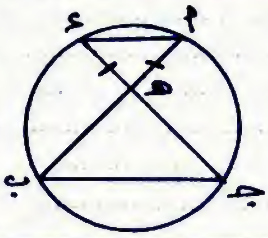
إثبت أن أ و = و ب



⑨ أ ب ∩ جـ ء = {هـ} ،

هـ أ = هـ ء إثبت أن

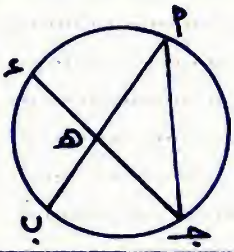
هـ ب = هـ جـ



⑩ أ ب = جـ ء ،

أ ب ∩ جـ ء = {هـ}

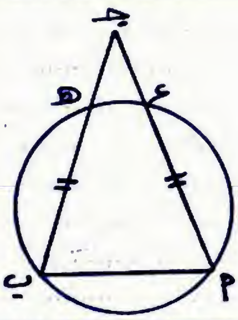
إثبت أن △ أ جـ هـ متساوي الساقين



⑪ أ ء = ب هـ ،

أ ء ∩ ب هـ = {جـ}

إثبت أن جـ ء = جـ هـ



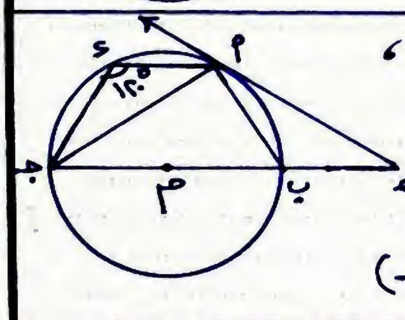
⑫ هـ أ مماس للدائرة م ،

ق(∠أ ء جـ) = ١٢٠°

إثبت أن

① ب أ = ب هـ

② ق(∠أ ب هـ) = ق(∠هـ أ جـ)

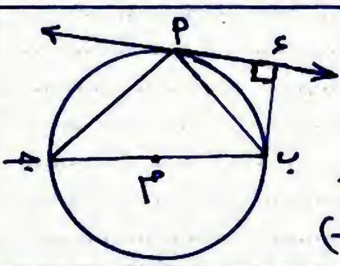


⑬ أ ء مماس للدائرة م

عند أ ، ب جـ قطر ،

ب ء ⊥ أ ء إثبت أن

ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ ب)

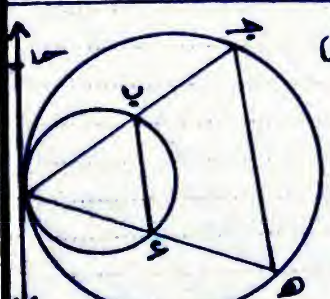


⑭ دائرتان متماستان من الداخل

في أ ، أ س مماس مشترك

إثبت أن

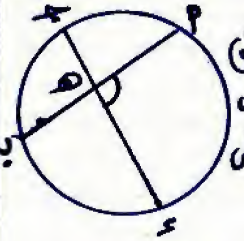
ء ب // هـ جـ



٣ [تمارين مشهورة]

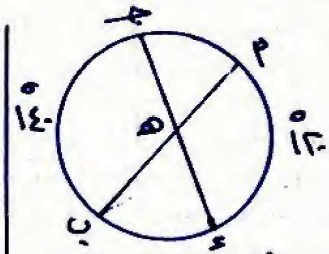
تمرين مشهور ①

إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.



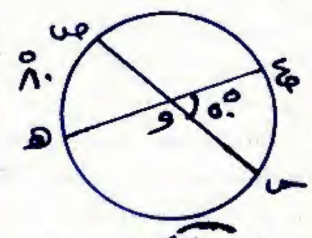
ق(هـ^) = ½ ق(أ ء⌒) + ½ ق(جـ ب⌒)

قياس القوس = ضعف الزاوية - القوس المعطى



ق(هـ^) = ...

ق(هـ^) = ٦٠ + ٧٠ = ١٣٠°

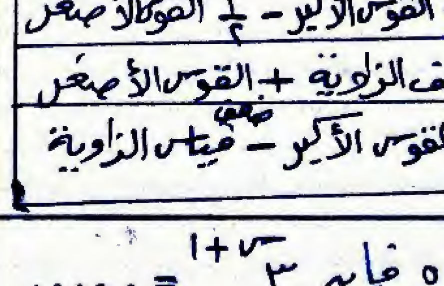


ق(س ع⌒) = ...

ق(س ع⌒) = ١٠٠ - ٨٠ = ٢٠°

تمرين مشهور ②

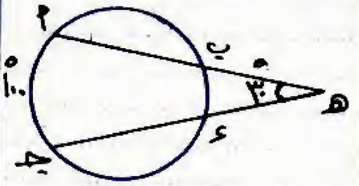
إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.



ق(أ^) = ½ ق(جـ هـ⌒) - ½ ق(ب ء⌒)

قياس الزاوية = ½ القوس الأكبر - ½ القوس الأصغر
الأكبر = ضعف الزاوية + القوس الأصغر
القوس الأصغر = القوس الأكبر - ضعف قياس الزاوية

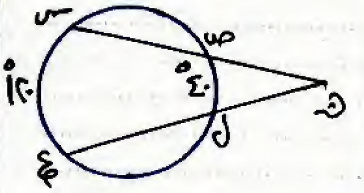
إذا كان $٣^{س} = ٥$ فإن $٣^{س+١} = ...$



ق(ب ء⌒) = ...

= الأكبر - ضعف الزاوية

= ١٠٠ - ٦٠ = ٤٠°



ق(هـ^) = ...

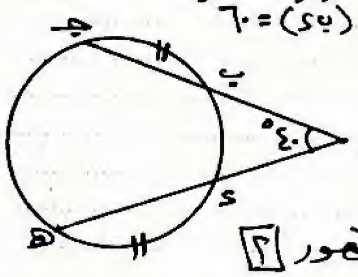
الزاوية = ½ الأكبر - ½ الأصغر

= ٦٠ - ٢٠ = ٤٠°

مثال ①

ق(أ^) = ٤٠°، ق(ب ء⌒) = ٦٠°، ق(ب جـ⌒) = ق(ء هـ⌒)

أوجد ① ق(هـ جـ⌒)
② ق(ب جـ⌒)



البرهان من التمرين المشهور ②

ق(جـ هـ⌒) الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

= ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠° # ①

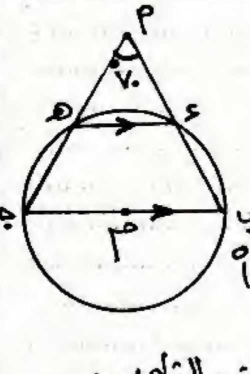
∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(ب جـ⌒) = $\frac{٣٦٠ - (١٤٠ + ٦٠)}{٢}$ = ٨٠° # ②

مثال ②

ب جـ قطر في الدائرة م، ق(أ^) = ٧٠°، ء هـ // ب جـ

أوجد ق(ب ء⌒)



البرهان ∵ ب جـ قطر

∴ ق(ب جـ⌒) الأكبر نصف دائرة = ١٨٠°

من التمرين المشهور ②

ق(ء هـ⌒) الأصغر = الأكبر - ضعف الزاوية

= ١٨٠ - ١٤٠ = ٤٠°

∵ ق(ب ء جـ⌒) نصف دائرة = ١٨٠°

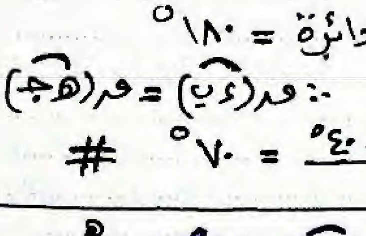
∵ ء هـ // ب جـ ∴ ق(ء ب⌒) = ق(هـ جـ⌒)

∴ ق(ب ء⌒) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠° #

مثال ③

ق(أ^) = ٣٠°، ق(ب ء⌒) = ٤٤°، ق(ء جـ هـ^) = ٤٨° أوجد

① ق(جـ هـ⌒)
② ق(ب جـ⌒)



البرهان من التمرين المشهور ②

∴ ق(جـ هـ⌒) = ضعف ق(أ^) + ق(ء ب⌒) الأصغر

= ٦٠ + ٤٤ = ١٠٤° # ①

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

∵ ∠(د جـ هـ) محيطية تقابل القوس د هـ

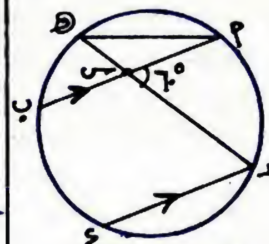
∴ ق(⌒د هـ) = ٢ × ٤٨ = ٩٦°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(⌒ب جـ) = ٣٦٠° − (٩٦° + ١٠٤° + ٤٤°)

= ١١٦° #

مثال ٤ أب // جـ د ، ق(∠أ س جـ) = ٦٠° ، ق(⌒أ جـ) = ٨٠° أوجد بالبرهان



(١) ق(∠أ هـ جـ) (٢) ق(⌒ب د) (٣) ق(⌒ب هـ)

البرهان ∵ ق(∠أ هـ جـ) = ½ ق(⌒أ جـ)

= ٤٠° محيطية تقابل أجـ # (١)

∵ أب // جـ د ∴ ق(⌒أ جـ) = ق(⌒ب د)

= ٨٠° # (٢)

من التمرين المشهور الأول

ق(⌒هـ ب) = ٢ ق(∠أ س جـ) − ق(⌒أ جـ)

= ١٢٠° − ٨٠° = ٤٠° # (٣)

مثال ٥ أد ، ب جـ وتران متقاطعان

بحيث ق(∠جـ) = ٢٢° ، ق(∠هـ) = ٣٢° أوجد ق(∠أ م جـ)

البرهان

∵ ق(∠ب جـ د) = ½ ق(⌒ب د) محيطية

∴ ق(⌒ب د) = ٢ × ٢٢ = ٤٤°

من التمرين المشهور (٢)

ق(⌒أ جـ) = ٢ × ٣٢ + ق(⌒ب د)

= ٦٤ + ٤٤ = ١٠٨°

من التمرين المشهور (١)

ق(∠أ م جـ) = ½ ق(⌒ب د) + ½ ق(⌒أ جـ)

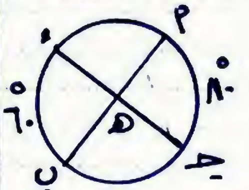
= ٢٢ + ٥٤ = $\boxed{٧٦}$ #

فكر $\frac{جا ٣٠}{٤}$ = ...

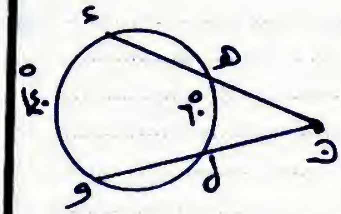
(تمارين)

(على التمارين المشهورة)

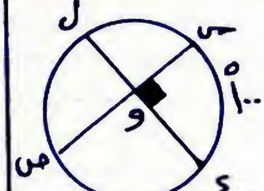
(١) أكمل ما يأتي



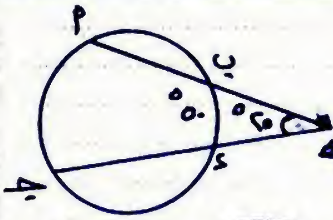
ق(∠أ هـ جـ) = ...



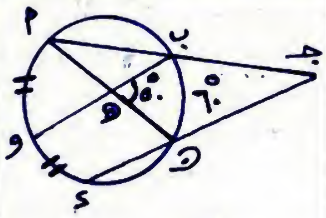
ق(∠ن) = ...



ق(⌒ل م ع) = ...



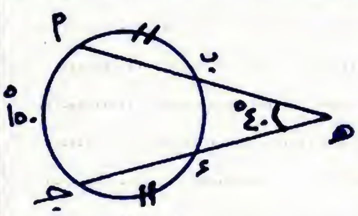
ق(⌒أ جـ) = ...



ق(∠أ ب و) = ...

ق(∠أ ن د) = ...

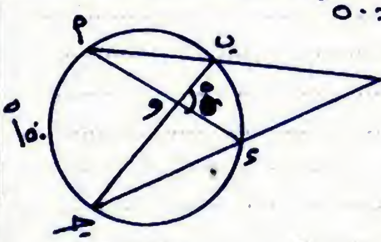
ق(∠جـ) = ...



ق(⌒ب د) = ...

ق(⌒أ ب) = ...

مثال ٢ ق(∠ب و د) = ٥٠° ، ق(⌒أ جـ) = ١٥٠° ،

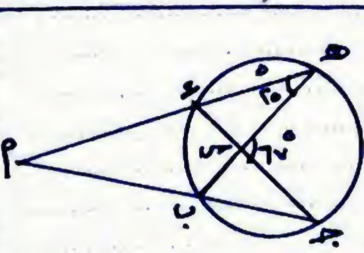


(١) أوجد ق(⌒ب د)

(٢) أوجد ق(∠ب أ د)

(٣) أوجد ق(∠هـ)

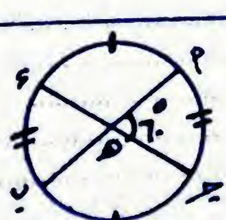
مثال ٣ ق(∠هـ) = ٢٥° ، ق(∠هـ س جـ) = ٦٧° أثبت أن



ق(∠أ ب هـ) = ق(⌒أ د جـ)

= ١٣٨°

مثال ٤ ق(⌒أ جـ) = ق(⌒د ب) ، ق(⌒أ د) = ق(⌒جـ ب) ، ق(∠أ هـ جـ) = ٦٠° أوجد ق(⌒أ د)



الدرس الرابع

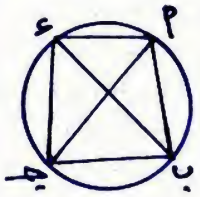
[الشكل الرباعي الدائري]

هو شكل رباعي جميع رؤوسه تقع على دائرة واحدة

⇐ المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوي الساقين أشكال رباعية دائرية بينما متوازي الأضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوي الساقين ليست أشكالاً رباعية دائرية

خواص الشكل الرباعي الدائري

[1] كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها تكونان متساويتان في القياس



مثلاً

ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ ء)

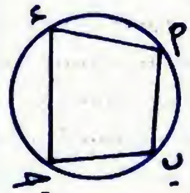
مرسومتان على القاعدة أء

وأيضاً: ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب ء جـ)

مرسومتان على القاعدة ب جـ وهكذا

⇐ الزاويتان المرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهتين مختلفتين منها متكاملتان

[2] كل زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموع قياسهم ١٨٠°)

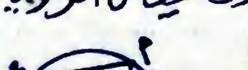


أ ب جـ ء رباعي دائري

فإن ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°

[3] قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الرباعي الدائري تساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



∵ ∠أ ب هـ خارجة عن الرباعي الدائري

∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠ء)

متى يكون الشكل الرباعي دائرياً :-

لإثبات أن الشكل الرباعي دائري يجب أن نثبت إحدى الخواص الآتية :

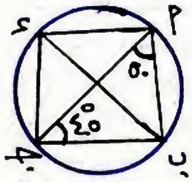
[1] إذا وُجدت نقطة في مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

[2] إذا وُجدت زاويتان متساويتان في القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفي جهة واحدة من هذه القاعدة

[3] إذا وُجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموعهم = ١٨٠°)

[4] إذا وُجدت زاوية خارجة عند أي رأس من رؤوسه قياسها يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

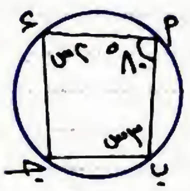
أ ب جـ ء شكل رباعي دائري



ق(∠ب ء جـ) = ...°

ق(∠ب ء هـ) = ...°

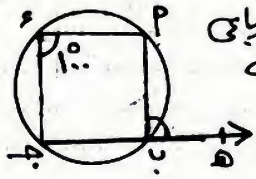
أ ب جـ ء رباعي دائري



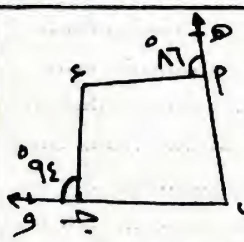
ق(∠هـ) = ...°

س = ...°

أ ب جـ ء رباعي دائري



ق(∠أ ب هـ) = ...



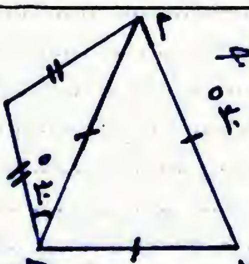
إثبت أن أ ب جـ ء رباعي دائري

مثال [1] أ ب = ب جـ = أ جـ

، أ ء = ء جـ ، ق(∠أ جـ ء) = ٣٠°

إثبت أن

أ ب جـ ء رباعي دائري



البرهان ∵ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع

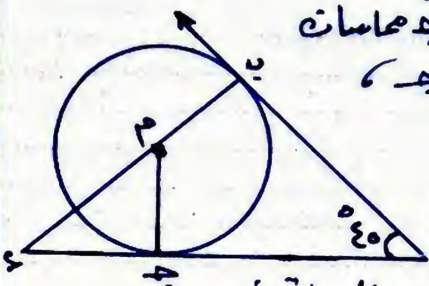
∴ ق(∠ب) = ٦٠° في Δ أ ء جـ المتساوي الساقين

ق(∠ء أ جـ) = ق(∠أ جـ ء) = ٣٠ ∴ ق(∠ء) = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠

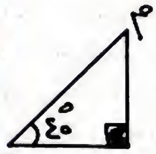
∴ ق(∠ب) + ق(∠ء) = ٦٠° + ١٢٠° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب جـ ء رباعي دائري #

مثال ② $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ،
ق(∠أ) = ٤٥°
إثبت أن:
① أ ب م جـ رباعي دائري
② △ م جـ د متساوي الساقين

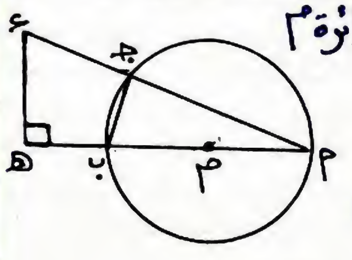


البرهان ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{مب}$ نصف القطر
∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°
∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس ، $\overline{مجـ}$ نصف القطر
∴ ق(∠أ جـ م) = ٩٠°
∵ ق(∠أ ب م) + ق(∠أ جـ م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°
متقابلتان متكاملتان
∴ أ ب م جـ رباعي دائري # ①
في △ أ ب د   ق(∠د) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°)
= ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°



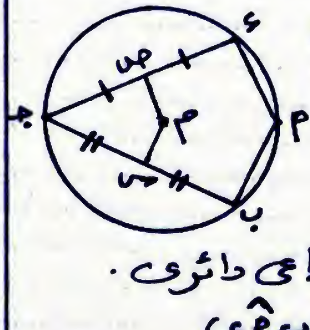
في △ م جـ د
ق(∠جـ م د) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°
∴ ق(∠جـ م د) = ق(∠جـ د م) = ٤٥°
∴ △ م جـ د متساوي الساقين

مثال ③ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م
$\overleftrightarrow{دهـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$
إثبت أن:
الشكل ب هـ د جـ رباعي دائري



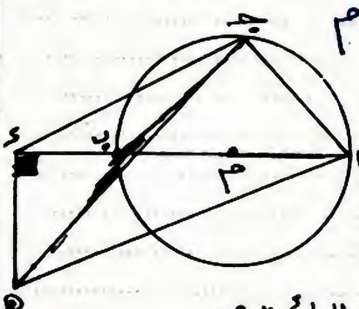
البرهان ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م
∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة
∴ $\overline{بجـ} \perp \overline{أد}$
∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠هـ) وهي خارجة عن الشكل جـ ب هـ د ، ∠د هـ مقابلة للمجاورة لها
∴ جـ ب هـ د رباعي دائري

مثال ④ أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م
، س منتصف $\overline{بجـ}$
، ص منتصف $\overline{جـد}$
إثبت أن
① الشكل م س جـ ص رباعي دائري.
② ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ د)



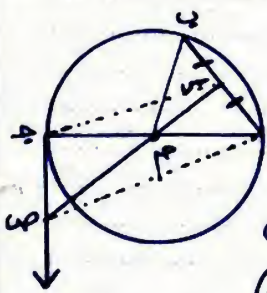
البرهان ∵ س منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ ق(∠س) = ٩٠°
∵ ص منتصف $\overline{دجـ}$ ∴ ق(∠ص) = ٩٠°
∵ ق(∠ص) + ق(∠س) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°
متقابلتان متكاملتان
∴ م س جـ ص رباعي دائري # ①
∴ ق(∠ص م س) + ق(∠جـ) = ١٨٠° ← ①
∵ د أ ب جـ رباعي دائري
∴ ق(∠ب أ د) + ق(∠جـ) = ١٨٠° ← ②
من ① ، ② ينتج أن
ق(∠ص م س) = ق(∠ب أ د) # ②

مثال ⑤ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م
، رسم $\overleftrightarrow{دهـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ،
$\overleftrightarrow{جـب} \cap \overleftrightarrow{دهـ} = \{هـ\}$
إثبت أن
أ جـ د هـ شكل رباعي دائري



البرهان ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م
∴ ∠أ جـ ب محيطية مرسومة في نصف دائرة
∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°
∴ ق(∠أ جـ هـ) = ق(∠أ د هـ) = ٩٠°
وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أهـ}$
∴ أ جـ د هـ رباعي دائري #

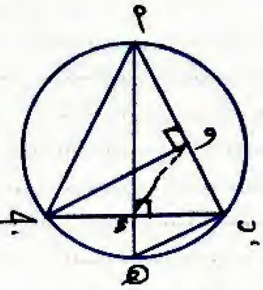
مثال ⑥ $\overline{أجـ}$ في الدائرة م ،
س منتصف $\overline{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـص}$ مماس للدائرة قطع $\overrightarrow{سم}$ في ص
إثبت أنه
① الشكل أ س جـ ص رباعي دائري
② ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠م ص جـ)



البرهان ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق(∠س) = ٩٠°
∵ $\overline{أجـ}$ قطر ، $\overleftrightarrow{جـص}$ مماس عند جـ
∴ ق(∠جـ) = ٩٠°
∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠أ جـ ص) = ٩٠°
وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أص}$
∴ أ س جـ ص رباعي دائري # ①
∵ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠ب أ جـ) ← ②
مركزية ومحيطية مرسومتان على $\overset{\frown}{بجـ}$
∵ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠م ص جـ) ← ③ مرسومتان على قاعدة واحدة
من ② ، ③ ∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠م ص جـ) # ②

01002097866
أ/ وليد محمد عكاشة

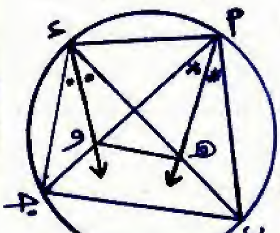
مثال ٧ أ ء ⊥ ب جـ ،
هـو ⊥ أ ب إثبت أن
① الشكل أ و ء جـ رباعي دائري
② ق(هـ ب̂ جـ) = ق(ء و̂ جـ)



البرهان

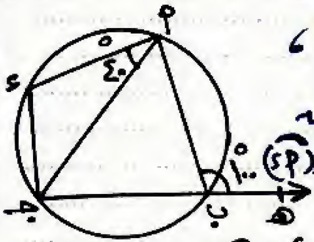
∵ هـو ⊥ أ ب ، ∵ أ ء ⊥ ب جـ
∴ ق(أ و̂ جـ) = ق(أ ء̂ جـ) = ٩٠°
وهما مرسومتان على القاعدة أ جـ
∴ الشكل أ و ء جـ رباعي دائري # ①
ينتج من الرباعي الدائري أن
~~ق(ء و̂ جـ) = ق(ء أ̂ جـ) ← ①~~
∵ ق(ء و̂ جـ) = ق(ء أ̂ جـ) مرسومة على قاعدة واحدة ء جـ ← ①
∵ ق(هـ ب̂ جـ) = ق(هـ أ̂ جـ) ← ②
محيطيتان مرسومتان على نفس القوس هـ جـ
من ①، ② ينتج أن
ق(هـ ب̂ جـ) = ق(ء و̂ جـ) # ②

مثال ٨ أ ب جـ ء رباعي دائري
أ هـ ينصف ∠ ب أ جـ ،
ء و ينصف ∠ ب ء جـ
إثبت أن ① أ هـ و ء رباعي دائري
② هـو // ب جـ



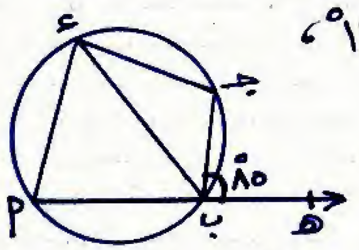
البرهان ∵ ق(ب أ̂ جـ) = ق(ب ء̂ جـ) محيطيتان مرسومتان على قاعدة واحدة
∴ ½ ق(ب أ̂ جـ) = ½ ق(ب ء̂ جـ)
∴ ق(هـ أ̂ و) = ق(هـ ء̂ و) وهما مرسومتان على القاعدة هـو
∴ أ هـ و ء شكل رباعي دائري # ①
من الشكل الرباعي الدائري أ هـ و ء نستنتج أن
ق(ء هـ̂ و) = ق(و أ̂ ء) مرسومتان على القاعدة و ء ← ①
∵ ق(جـ ب̂ ء) = ق(جـ أ̂ ء) ← ②
محيطيتان مرسومتان على نفس القوس جـ ء
من ①، ② ينتج أن
ق(جـ ب̂ ء) = ق(ء هـ̂ و) وهما في وضع تناظر
∴ هـو // ب جـ # ②

مثال ٩ ق(أ ب̂ هـ) = ١٠٠° ،
ق(جـ أ̂ ء) = ٤٠° أوجد ~~ق(...)~~
ق(أ ء⌢) = ق(جـ ء⌢)



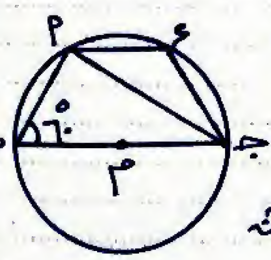
البرهان ∵ أ ب جـ ء رباعي دائري
∵ ∠ أ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ ء
∴ ق(أ ب̂ هـ) = ق(ء̂) = ١٠٠°
في △ أ ء جـ ق(أ جـ̂ ء) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°)
∴ ق(أ جـ̂ ء) = ٤٠°
∴ ق(ء أ̂ جـ) = ق(أ جـ̂ ء) = ٤٠°
∴ △ أ ء جـ متساوي الساقين
∴ أ ء = ء جـ وتر = وتر
∴ ق(أ ء⌢) = ق(ء جـ⌢) قوس = قوس #

مثال ١٠ ق(أ ب⌢) = ١١٠° ،
ق(جـ ب̂ هـ) = ٨٥°
أوجد : ق(ب ء̂ جـ)



البرهان
∵ ∠ جـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري جـ ب أ ء ∴ ق(جـ ب̂ هـ) = ق(جـ ء̂ أ) = ٨٥°
∵ ق(أ ب⌢) = ١١٠° ∴ ق(ب ء̂ أ) المحيطية = ½ ق(أ ب⌢)
∴ ق(ب ء̂ أ) = ٥٥°
∴ ق(ب ء̂ جـ) = ٨٥ − ٥٥ = ٣٠° #

مثال ١١ أ ب جـ ء رباعي دائري
جـ ب قطر في الدائرة م ،
ق(أ ب̂ جـ) = ٦٠° ،
طول أ ء⌢ = طول جـ ء⌢ إثبت أن
جـ أ ينصف ∠ ء جـ ب



البرهان ∵ جـ ب قطر في الدائرة م
∴ ق(جـ أ̂ ب) = ٩٠° قائمة محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ ق(أ⌒ء) = ق(جـ⌒ء)

∴ أ ء = جـ ء ∴ Δ ء جـ أ متساوي الساقين

∵ أ ء جـ ب رباعي دائري

∴ ق(ء̂) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° (متقابلتان متكاملتان)

في Δ ء جـ أ ق(ء جـ^ أ) = (١٨٠ − ١٢٠) / ٢ = ٣٠°

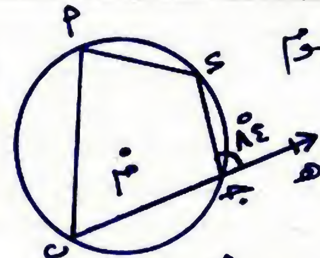
في Δ أ جـ ب ∴ ق(أ جـ^ ب) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°)

∴ ق(أ جـ^ ب) = ٣٠°

∴ ق(ء جـ^ أ) = ق(أ جـ^ ب) = ٣٠°

∴ جـ أ ينصف ∠ ء جـ ب #

مثال ١٢



أ ب جـ ء رباعي مرسوم داخل دائرة م

ق(ء جـ^ هـ) = ٨٤°

ق(ب̂) = ½ ق(ء̂)

أوجد ① ق(أ̂) ② ق(ب̂)

البرهان ∵ ∠ ء جـ هـ خارجة عن الشكل الرباعي أ ب جـ ء

∴ ق(ء جـ^ هـ) = ق(أ̂) = ٨٤° # ①

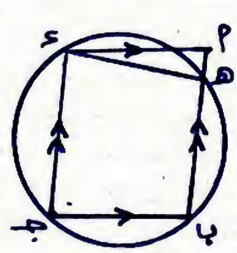
∵ أ ب جـ ء ∴ ق(ب̂) + ق(ء̂) = ١٨٠°

∵ ق(ب̂) = ½ ق(ء̂)

∴ ق(ب̂) = ١٨٠ / ٣ = ٦٠°

∴ ق(ب̂) = ٦٠° # ②

مثال ١٣



أ ب جـ ء متوازي أضلاع

إثبت أن

أ ء = هـ ء

البرهان ∵ ء هـ ب جـ رباعي دائري

∴ ق(أ هـ^ ء) = ق(جـ̂) ← ①

خارجة عن الرباعي الدائري هـ ب جـ ء

∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع

∴ ق(أ̂) = ق(جـ̂) ← ②

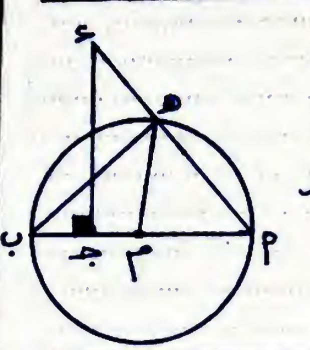
من ① ، ② ينتج أن

ق(أ هـ^ ء) = ق(أ̂)

∴ Δ ء أ هـ متساوي الساقين ∴ أ ء = هـ ء #

تمارين على الشكل الرباعي الدائري

١

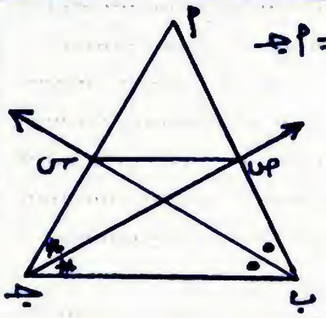


أ ب قطر في الدائرة م ، هـ ء ⊥ أ ب إثبت أن

① النقط ء ، هـ ، جـ ، ب يمر بها دائرة واحدة

② ق(أ م^ هـ) = ٢ ق(ء̂)

٢



أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ

ب س ينصف ∠ ب ،

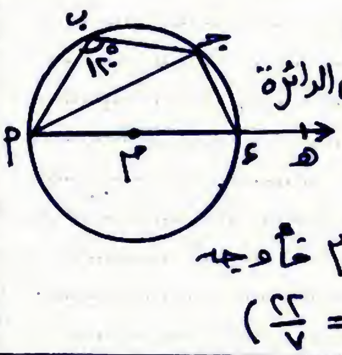
جـ ص ينصف ∠ جـ ،

إثبت أن

① ب جـ س ص رباعي دائري

② س ص // ب جـ

٣



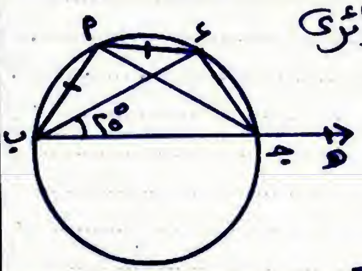
أ ب جـ ء رباعي دائري

ق(ب̂) = ١٢٠° ، أ ء قطر في الدائرة

① أوجد ق(جـ ء^ هـ) ، ق(جـ أ^ ء)

② إذا كان: ء جـ = ٣√٧ فأوجد طول أ⌒ء حيث (π = ٢٢/٧)

٤



أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

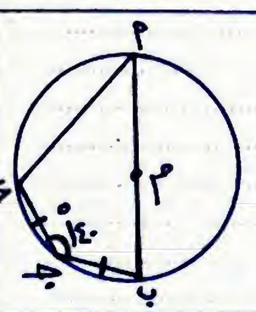
فيه أ ب = أ ء

ق(هـ ب^ ء) = ٢٥°

ق(هـ جـ^ ء) = ١٣٠°

إثبت أن أ ء = ء جـ

٥



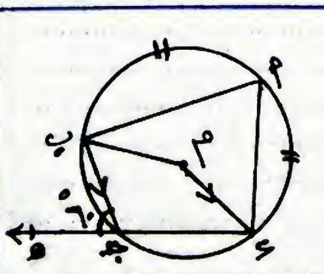
أ ب جـ ء رباعي دائري ،

جـ ب = جـ ء ،

ق(ب جـ^ ء) = ١٤٠°

أوجد ① ق(أ̂) ② ق(ء̂)

٦



ق(ب جـ^ هـ) = ٦٠° ،

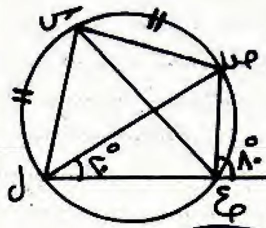
ب جـ // أ ء ،

أ منتصف ب⌒ء الأكبر

إثبت أن ① أ ب جـ ء معين

② أ جـ قطر في الدائرة

مثال ١٢



س منتصف ⌒ص ل ،
ق(∠ص ع ن) = ٨٠° ،
ق(∠ص ل ع) = ٢٠° ،
أوجد ق(∠ع س ل) ، ق(⌒س ص ع)

مثال ١٣

$\overline{بج}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{بأ}$ وتر فيها ، ء ∈ $\overline{أج}$ بحيث ق(∠أ ء ج) = ١١٨° ، رسم $\overrightarrow{أهـ}$ // $\overline{ءج}$ ويقطع الدائرة في هـ

(١) أوجد ق(∠أ ب ج)

(٢) إثبت أن ق(∠أ ج ء) = ق(∠ج ب هـ)

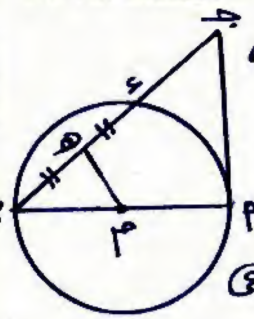
مثال ١٤

أ ب ج مثلث حاد الزوايا مرسوم داخل دائرة ، رسم $\overrightarrow{أء}$ ⊥ $\overline{بج}$ ليقطع بج عند ء ويقطع الدائرة عند هـ ، رسم $\overline{جو}$ ⊥ $\overline{أب}$ ليقطع أب عند و

اثبت أن (١) الشكل أ و ء ج رباعي دائري

(٢) ق(∠ب و ء) = ق(∠ب هـ ء)

مثال ١٥

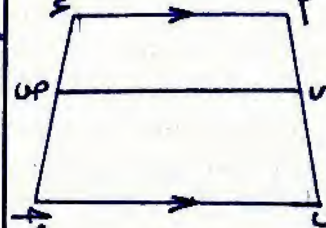


$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overrightarrow{أج}$ مماس لها عند أ ،
هـ منتصف $\overline{ءب}$ ،
ق(∠ب) = ٤٠°

(١) إثبت أن: الشكل أ م هـ ج رباعي دائري

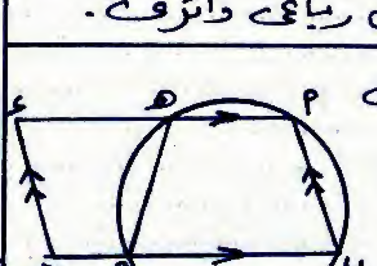
(٢) أوجد ق(∠ج)

مثال ١٦



أ ب ج ء شكل رباعي فيه $\overline{أء}$ // $\overline{بج}$ ، فإذا كان الشكل أ س ص ء رباعي دائري ، اثبت أن الشكل س ب ج ص رباعي دائري.

مثال ١٧

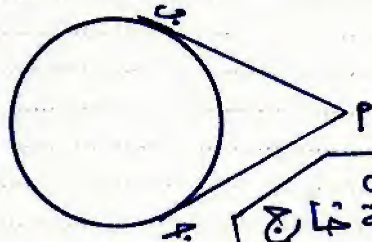


أ ب ج ء متوازي أضلاع
إثبت أن الشكل ج ء هـ و رباعي دائري.

الدرس الخامس :-

[العلاقة بين مماسات الدائرة]

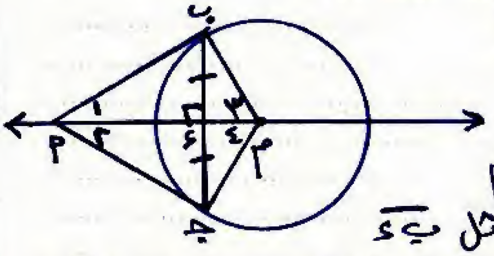
نظرية (٤)



القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول.

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من أ
∴ $\boxed{أب = أج}$

نتائج هامة

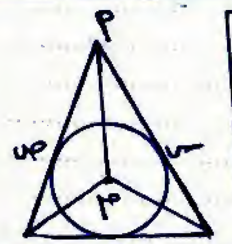


$\overleftrightarrow{أم}$ ⊥ $\overline{بج}$
، $\boxed{ب ء = ء ج}$
∴ $\overleftrightarrow{أم}$ محور تماثل $\overline{بج}$

١ المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محوراً لوتر التماس لهذين المماسين

٢ المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفي القطرين المارين بنقطتي التماس.

ق(∠١) = ق(∠٢) ، ق(∠٣) = ق(∠٤)



مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية.

لاحظ أن

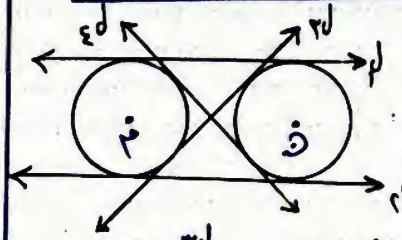
$\boxed{أس = أص}$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من أ

$\boxed{ب س = ب ع}$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من ب

$\boxed{ج ع = ج ص}$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من ج

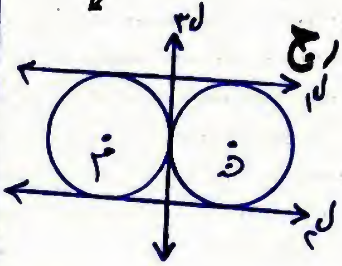
[الرياضيات غذاء العقل]

* عدد المماسات المشتركة لدائرتين :-



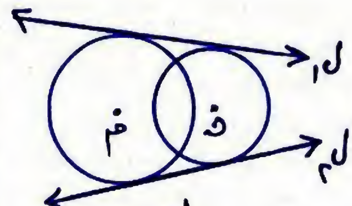
١ متباعدتان

٤ مماسات مشتركة



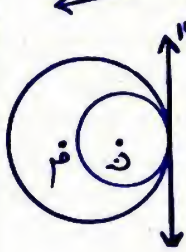
٢ متماستان من الخارج

٣ مماسات مشتركة



٣ متقاطعتان

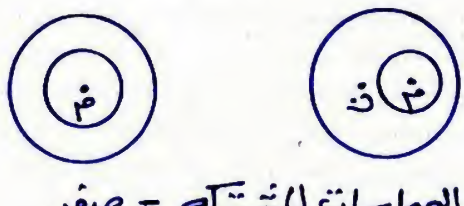
٢ مماسان مشتركان



٤ متماستان من الداخل

١ مماس واحد

٥ متداخلتان ، متحدتي المركز



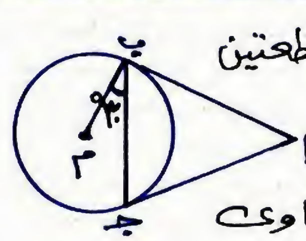
عدد المماسات المشتركة = صفر

مثال ١

أب ، أجـ قطعتين مماستين للدائرة م

، ق(م ب̂ جـ) = ٣٠°

إثبت أن Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع



البرهان ∵ أب مماس ، م ب نصف قطر

∴ ق(أ ب̂ م) = ٩٠°

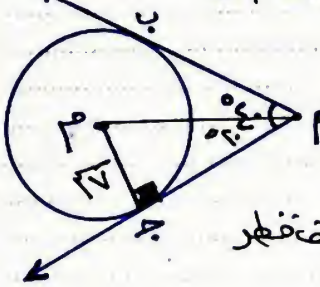
∴ ق(أ ب̂ جـ) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان مرسومتان من أ ∴ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع #

أي مثلث متساوي الساقين فيه زاوية قياسها ٦٠° يكون مثلث متساوي الأضلاع

مثال ٢

أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ، ق(أ̂) = ٤٠° ، إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧√٣ أوجد لأقرب سنتيمتر: طول أجـ .



البرهان برسم أم

ينصف ∠ أ

∴ ق(م أ̂ جـ) = ٢٠°

∵ أجـ مماس ، م جـ نصف قطر

∴ ق(جـ̂) = ٩٠°

ظا(جـ أ̂ م) = م جـ / أ جـ

ظا٢٠ / ١ = ٧ / أ جـ   أ جـ = (١ × ٧) / ظا٢٠ ≃ ١٩

مثال ٣

س أ ، س ب مماسان للدائرة عند أ ، ب

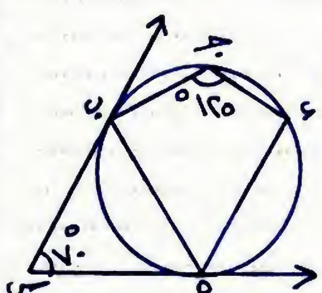
ق(أ س̂ ب) = ٧٠° ،

ق(د جـ̂ ب) = ١٢٥° ،

إثبت أن

١ أب ينصف ∠ د أ̂ س

٢ أد // س ب



البرهان

∵ أ د جـ ب رباعي دائري

∴ ق(أ̂) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥° (متقابلتان متكاملتان)

∵ س أ ، س ب قطعتان مماستان مرسومتان من س

∴ س أ = س ب

∴ Δ س أ ب متساوي الساقين

∴ ق(س أ̂ ب) = (١٨٠ − ٧٠) / ٢ = ٥٥°

∴ ق(س أ̂ ب) = ق(د أ̂ ب) = ٥٥°

∴ أب ينصف ∠ د أ̂ س # ١

∴ ق(د أ س̂) = ٥٥° + ٥٥° = ١١٠°

∵ ق(د أ س̂) + ق(س̂) = ٧٠ + ١١٠ = ١٨٠°

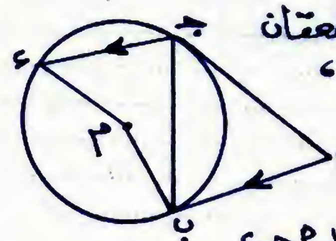
وهما في وضع تداخل

∴ أد // س ب # ٢

الاعتذار عن الخطأ لا يجرح كرامتك بل يجعلك كبيراً بعين من أخطأت بحقه

01002097866
أ/ وليد محمد عكاشة

مثال ④ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماسيتان للدائرة م ،



$\overline{أب} \parallel \overline{جـ ء}$ ،

ق(ب م̂ ء) = ١٣٠°

① إثبت أن: $\overrightarrow{جـب}$ ينصف ∠ أجـ ء

② أوجد: ق(أ̂)

البرهان ق(ب جـ̂ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(ب م̂ ء) = ٦٥°

محيطية ومركزية مشتركتان في القوس ب ء

∵ $\overline{جـ ء} \parallel \overline{أب}$

∴ ق(أ ب̂ جـ) = ق(ب جـ̂ ء) = ٦٥° بالتبادل

∵ أب = أجـ قطعتان مماسيتان

∴ Δ أ ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(أ جـ̂ ب) = ق(أ ب̂ جـ) = ٦٥°

∴ ق(أ جـ̂ ب) = ق(ب جـ̂ ء) = ٦٥°

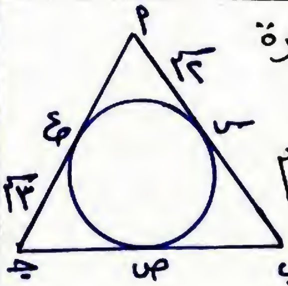
∴ $\overrightarrow{جـب}$ ينصف ∠ أجـ ء # ①

في Δ أ ب جـ

ق(أ̂) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° # ②

مثال ⑤ Δ أ ب جـ يمس الدائرة



من الخارج في س ، ص ، ع

، فإذا كان محيط Δ أ ب جـ = ١٨ سم

، أ س = ٢ سم ، جـ ع = ٣ سم

احسب طول $\overline{ب ص}$

البرهان ∵ أ س = أ ع قطعتان مماسيتان

∴ أ س = أ ع = ٢ سم

∵ جـ ص = جـ ع قطعتان مماسيتان مرسومتان من جـ

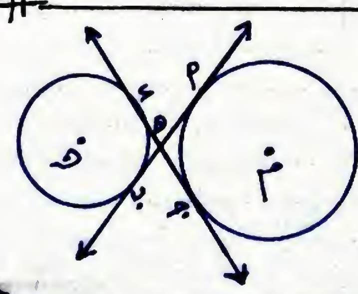
جـ ص = جـ ع = ٣ سم

∵ محيط Δ أ ب جـ = ١٨ سم

∴ ب ص = $\frac{١٨ - (٤ + ٦)}{٢} = \frac{١٨ - ١٠}{٢} = ٤$ سم

#

مثال ⑥ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$



مماسان للدائرتين

م ، ن

إثبت أن

$\boxed{أب = جـ ء}$

في الدائرة م $\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ جـ}$ مماستان من عند هـ

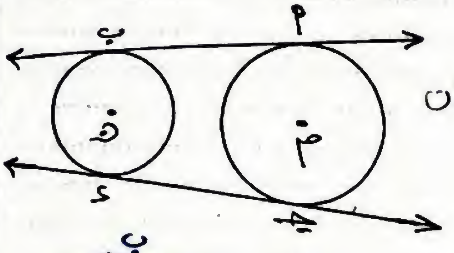
∴ هـ أ = هـ جـ ⟵ ①

في الدائرة ن $\overline{هـ ء}$ ، $\overline{هـ ب}$ مماستان من عند هـ

∴ هـ ء = هـ ب ⟵ ②

بجمع ① ، ② ∴ أ ب = جـ ء #

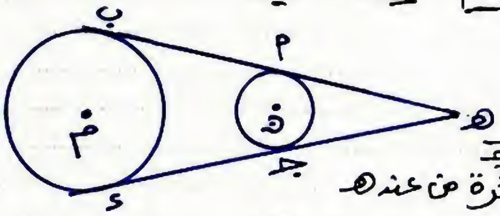
مثال ⑦



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماسان

إثبت أن

$\boxed{أب = جـ ء}$



البرهان

∵ $\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ جـ}$

مماسان للدائرة من عند هـ

∴ هـ أ = هـ جـ ⟵ ①

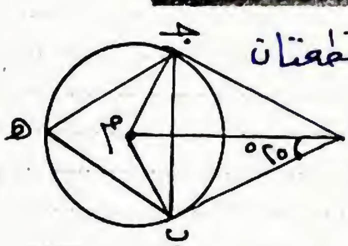
∵ $\overline{هـ ب}$ ، $\overline{هـ ء}$ مماسان للدائرة من عند هـ

∴ هـ ب = هـ ء ⟵ ② يطرح ① من ②

∴ أ ب = جـ ء #

[تمارين]
[على المماسات في الدائرة]

مثال ① $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان



مماستان للدائرة م

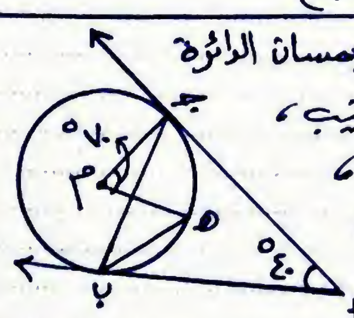
، ق(ب أ̂ م) = ٢٥° ،

هـ ∈ ب جـ الأكبر

أوجد ① ق(م جـ̂ ب)

② ق(ب هـ̂ جـ)

مثال ② $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ يمسان الدائرة



م عند ب ، جـ على الترتيب ،

ق(ب أ̂ جـ) = ٤٠° ،

ق(هـ م̂ جـ) = ٧٠° ،

إثبت أن

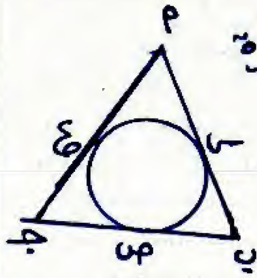
$\overrightarrow{ب هـ}$ ينصف ∠ أ ب جـ

[I Like Mathematics]

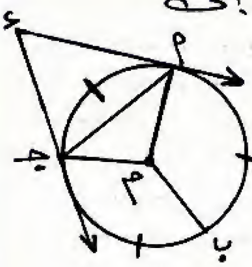
مثال ٣ Δ أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج في س، ص، ع ،

أ س = ٥ سم ، ب ص = ٣ سم ،

جـ ع = ٤ سم احسب محيط Δ أ ب جـ



مثال ٤ الدائرة م انقسمت إلى ثلاثة أقواس متساوية في الطول ، ء أ ، ء جـ يمسانها عند ء



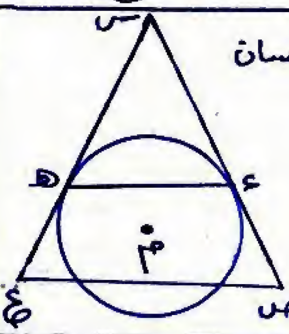
① أوجد ق(أ م̂ ب)

② إثبت أن :

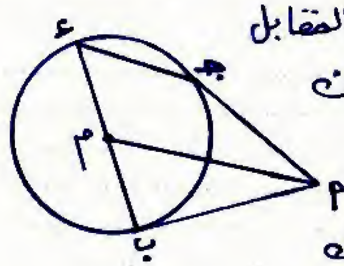
أولاً: الشكل أ م جـ ء رباعي دائري

ثانياً: Δ أ جـ ء متساوي الأضلاع

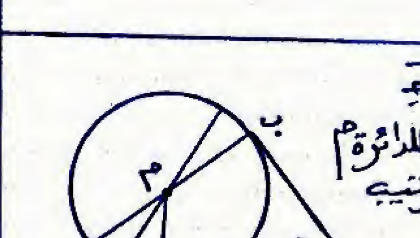
مثال ٥ س ص ، س ع مماسان الدائرة م عند ء ، هـ ، فإذا كان ء هـ // ص ع فأثبت أن الشكل ء ص ع هـ رباعي دائري



مثال ٦ في الشكل المقابل أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ب ء قطر في الدائرة إثبت أن أ م // جـ ء



مثال ٧ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ق(أ̂) = ٤٥° ، إثبت أن



① الشكل أ ب م جـ رباعي دائري

② أ ء = أ ب + م ب

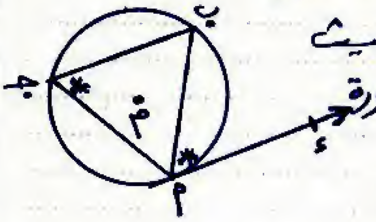
سبحان الله وبحمده ∴

∴ سبحان الله العظيم

الدرس السادس

[عكس نظرية الزاوية المماسية]

إذا رسم شعاع من إحدى نقطتي النهاية لوتر في دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة.

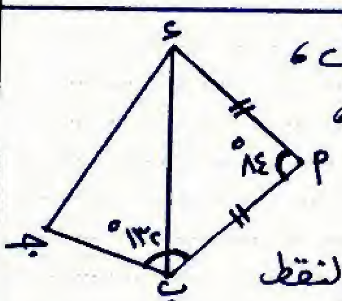


أي أن إذا كانت ق(جـ̂) = ق(ب أ̂ ء)

فإننا نستنتج أن أ ء مماس للدائرة م عند أ

مثال ١ أ ب جـ ء شكل رباعي ، أ ب = أ ء ، ق(أ̂) = ٨٤° ، ق(أ ب̂ جـ) = ١٣٢°

إثبت أن ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء



البرهان في Δ أ ب ء ∵ أ ب = أ ء

∴ ق(أ̂) = ٨٤°

∴ ق(أ ب̂ ء) = $\frac{١٨٠ - ٨٤}{٢}$ = ٤٨°

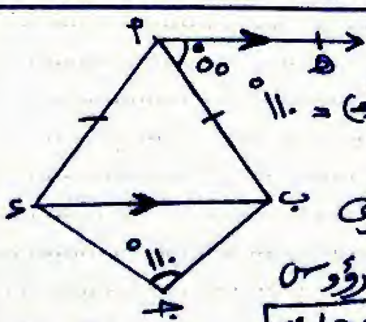
∴ ق(ء ب̂ جـ) = ١٣٢° − ٤٨° = ٨٤°

∴ ق(ب أ̂ ء) = ق(ء ب̂ جـ) = ٨٤°

وهما مشتركتان في الوتر ء ب

∴ ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

مثال ٢ أ هـ // ء ب ، ق(ب أ̂ هـ) = ٥٥° ، ق(جـ̂) = ١١٠° ، أ ب = أ ء إثبت أن



① الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

② أ هـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ ء

البرهان

∵ أ ب = أ جـ ∵ أ هـ // ب ء

∴ ق(هـ أ̂ ب) = ق(أ ب̂ ء) = ٥٥° بالتبادل

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠ء ب ث) = ٥٥°

في Δ أ ب ء   ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − (٥٥° + ٥٥°)

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

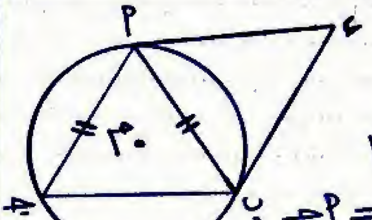
∵ في الشكل الرباعي أ ب جـ ء

∴ ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

وهما متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

مثال ٣



ءأ ، ءب قطعتان مماستان للدائرة م عند أ ، ب حيث أب = أجـ

إثبت أن أجـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

البرهان في Δ أ ب جـ ∵ أب = أجـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) ← ①

∵ ءأ ، ءب قطعتان مماستان مرسومتان من ء ∴ ءأ = ءب

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) ← ②

∵ ق(∠ب جـ أ) = ق(∠ء أ ب)

محيطية ومماسية مرسومتان على نفس القوس أب

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) = ق(∠أ ب جـ)

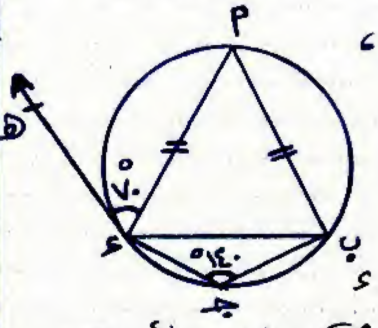
= ق(∠أ جـ ب)

ومن خواص المثلث

∴ ق(∠ب ء أ) = ق(∠ب أ جـ)

∴ أجـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

مثال ٤



أب = أء ، ق(∠جـ) = ١٤٠° ، ق(∠أ ء هـ) = ٧٠°

إثبت أن ءهـ مماس للدائرة عند ء

البرهان ∵ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

∵ أب = أء ∴ Δ أ ب ء متساوي الساقين

∴ ق(∠أ ب ء) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء هـ)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة أء

∴ ءهـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء عند ء

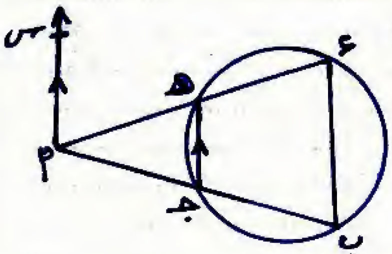
تمارين

١ أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أجـ = ب جـ

إثبت أن: جـء مماس للدائرة الخارجية للمثلث أ ب جـ

٢ الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري ، أس // جـهـ

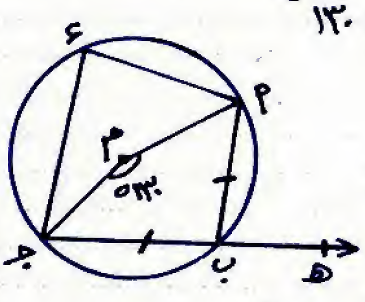
برهن أن أس مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء



٣ ق(∠أ م جـ) = ١٣٠° ، أب = ب جـ

فأوجد كلاً من: ق(∠ء) ، ق(∠أ ب هـ)

ثم إثبت أن: جـهـ يمس الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، م



٤ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، أء ينصف ∠ب أ جـ ويقطع ب جـ في ء والدائرة في هـ إثبت أن: ب هـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

٥ أب قطر في الدائرة م حيث أب = ٢٨ سم ، أجـ وتر فيها ، رسم ب ء مماساً للدائرة يقطع أجـ في ء فإذا كان: ب ء = ٢١ سم

① إثبت أن: أب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ جـ ب ء

② أوجد: طول ب جـ